ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ В МАНТИИ ЗЕМЛИ*

С. А. Тычков, В. В. Червов
Институт геологии и минералогии СО РАН, Новосибирск, Россия
Г. Г. Черных
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

A 3D numerical model of convection processes in Earth mantle is constructed on the basis of vorticity — vector potentional variables and the method of fractional steps. The detailed testing of the model was carried out.

Введение

Численному моделированию трехмерных конвективных течений в мантии Земли посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [1–7] и приведенную в них библиографию). Особо можно отметить статью [1], в которой содержатся результаты трехмерного моделирования конвективных течений в мантии, полученные разными авторами в применении к модельным задачам.

При решении трехмерных задач гидродинамики достаточно хорошо зарекомендовали себя переменные завихренность — векторный потенциал [8, 9]. Анализ известных работ показывает, что при численном моделировании конвективных процессов в мантии Земли указанным переменным уделено недостаточное внимание. Так, например, в статье [10] выполнено решение только для постоянной вязкости.

В настоящей работе предпринята попытка построения численной модели конвективных процессов в мантии Земли, основанной на вышеупомянутых переменных и методе дробных шагов [11]. Осуществлено сопоставление с результатами работы [1]. Работа является продолжением и развитием [12–14].

1. Математическая постановка задачи

Для описания течений в верхней мантии Земли привлекается хорошо известная математическая модель, включающая в себя обезразмеренные уравнения [15]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \qquad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект № 116).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \qquad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial w}{\partial z} + \mathrm{Ra}T; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T + Q. \qquad (5)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости; p — давление; T — температура; Q — источник тепловыделения; Ra — число Рэлея; η — динамическая вязкость.

Система уравнений (1)–(5) устроена так [16], что в начальный момент времени $t = t_0$ задаются начальные условия лишь для температуры: $T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z)$.

Простейшей областью интегрирования является параллелепипед.

В качестве краевых условий на боковых границах задаются условия проскальзывания, а на нижней и верхней — условия прилипания и фиксированные значения температуры.

Для построения численной модели осуществляется переход к новым зависимым переменным: вектору завихренности $\boldsymbol{\omega}$ и векторному потенциалу $\boldsymbol{\psi}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\omega^x + \mathbf{j}\omega^y + \mathbf{k}\omega^z = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{i}\psi^x + \mathbf{j}\psi^y + \mathbf{k}\psi^z. \qquad (6)$$

В результате система уравнений (1)–(4) переходит в следующую:

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}; \qquad (7)$$

$$\nabla^2[\eta\omega^x] = \eta_{xx}\omega^x + (\ \eta_x\omega^x_x + \eta_y\omega^y_x + \eta_z\omega^z_x) + F_1 + \mathrm{Ra}T_y; \qquad (8)$$

$$\nabla^2[\eta\omega^y] = \eta_{yy}\omega^y + \left(\ \eta_x\omega^x_y + \eta_y\omega^y_y + \eta_z\omega^z_y\right) + F_2 - \mathrm{Ra}T_x; \qquad (9)$$

$$\nabla^2[\eta\omega^z] = \eta_{zz}\omega^z + (\ \eta_x\omega^x_z + \eta_y\omega^y_z + \eta_z\omega^z_z) + F_3, \qquad (10)$$

где

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 2(\eta_{zz}w_y - \eta_{yy}v_z) + 2\eta_{yz}(v_y - w_z) - \eta_{xy}(u_z + -w_x) + \eta xz(v_x - u_y), \\ F_2 &= 2(\eta_{xx}u_z - \eta_{zz}w_x) + 2\eta_{xz}(w_z - u_x) - \eta_{yz}(v_x + u_y) + \eta xy(w_y - v_z), \\ F_3 &= 2(\eta_{yy}v_x - \eta_{xx}u_y) + 2\eta_{xy}(u_x - v_y) - \eta_{xz}(w_y + v_z) + \eta yz(u_z - w_x). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Нижние индексы x, y, z в (8)–(11) соответствуют частным производным по этим переменным. Начальные и граничные условия формулируются в терминах новых искомых функций.

Граничные условия проскальзывания для функций $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}$:
на поверхностях $x = 0$, $x = X$ $(0 \le y \le Y,\ 0 \le z \le 1)$:

$$\frac{\partial\psi^x}{\partial x} = \psi^y = \psi^z = 0, \quad \frac{\partial\omega^x}{\partial x} = \omega^y = 0, \quad \omega^z = \frac{\partial v}{\partial x};$$

на поверхностях $y = 0$, $y = Y$ $(0 \le x \le X,\ 0 \le z \le 1)$:

$$\frac{\partial\psi^y}{\partial y} = \psi^x = \psi^z = 0, \quad \frac{\partial\omega^y}{\partial y} = \omega^x = 0, \quad \omega^z = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Условия прилипания для функций $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}$:
на поверхностях $x = 0$, $x = X$ $(0 \le y \le Y,\ 0 \le z \le 1)$:

$$\psi^x = \frac{\partial \psi^y}{\partial x} = \psi^y = \frac{\partial \psi^z}{\partial x} = \psi^z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega^y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega^z = \frac{\partial v}{\partial x};$$

на поверхностях $y = 0$, $y = Y$ $(0 \le x \le X,\ 0 \le z \le 1)$:

$$\frac{\partial \psi^x}{\partial y} = \psi^x = \psi^y = \frac{\partial \psi^z}{\partial y} = \psi^z = 0, \quad \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega^y = 0, \quad \omega^z = -\frac{\partial u}{\partial y};$$

на поверхностях $z = 0$, $z = 1$ $(0 \le x \le X,\ 0 \le y \le Y)$:

$$\frac{\partial \psi^x}{\partial z} = \psi^x = \frac{\partial \psi^y}{\partial z} = \psi^y = \psi^z = 0, \quad \omega^x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega^y = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega^z = 0.$$

2. Алгоритм расчета

Конечно-разностный алгоритм решения задачи основан на применении метода дробных шагов [11]. Уравнения (5), (7)–(10) интегрируются с помощью схемы стабилизирующей поправки, являющейся итерационной для уравнений (7)–(10). Алгоритм расчета включает на каждом временном слое (до выхода на стационарный режим) следующие этапы:

1. При известном распределении температуры вычисляются завихренность, векторный потенциал и компоненты скорости (до сходимости итерационных процессов).

2. Вычисляется поле температуры.

На примере уравнения переноса тепла (5) схема стабилизирующей поправки выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{T^{n+1/3} - T^n}{\tau_t} + uL_xT^{n+1/3} - L_{xx}T^{n+1/3} &= -vL_yT^n + L_{yy}T^n - wL_zT^n + L_{zz}T^n,\\
\frac{T^{n+2/3} - T^{n+1/3}}{\tau_t} + vL_yT^{n+2/3} - L_{yy}T^{n+2/3} &= vL_yT^n - L_{yy}T^n,\\
\frac{T^{n+1} - T^{n+2/3}}{\tau_t} + wL_zT^{n+1} - L_{zz}T^{n+1} &= wL_zT^n - L_{zz}T^n,
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где τ_t — величина шага по времени, n — номер временного слоя.

В схеме (12) трехточечные разностные операторы L_{xx}, L_{yy}, L_{zz} и L_x, L_y, L_z аппроксимируют дифференциальные следующим стандартным образом (оставлен лишь один индекс):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong L_{xx}f = \frac{f_{i+1} - 2f + f_{i-1}}{h_x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cong L_xf = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h_x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cong L_{yy}f = \frac{f_{j+1} - 2f + f_{j-1}}{h_y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \cong L_yf = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h_y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cong L_{zz}f = \frac{f_{k+1} - 2f + f_{k-1}}{h_z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \cong L_zf = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h_z}.$$

Для реализации каждого дробного шага схемы (12) применялись скалярные трехточечные прогонки.

Граничные условия для завихренности реализовывались с применением формул Тома с дополнительным усреднением [8, 17].

3. Тестирование на модельной трехмерной задаче конвекции в мантии Земли

Тестирование численной модели осуществлялось путем решения модельной задачи [1] (аналогичные результаты получены и при решении более простой задачи с постоянной вязкостью). Решение отыскивалось в единичном кубе. При этом задавались следующие параметры: масштабный множитель при вязкости

$$\eta_0 = 1.20165 \cdot 10^{24}, \quad \eta(T) = \exp\left[\theta/\left(T + \Theta\right)\right] - \left[\theta/\left(0.5 + \Theta\right)\right],$$

причем

$$\theta = \left[225/\ln\left(r\right)\right] - 0.25\ln\left(r\right),\ \Theta = 15/\ln\left(r\right) - 0.5,$$

$$r = \eta|_{T=0}/\eta|_{T=1} = 20, \quad \mathrm{Ra} = \frac{\alpha g_z \rho d^3 \Delta T}{\eta_0 \chi} = 2 \cdot 10^4, \quad Q = 0.$$

Для решения задачи вводилась равномерная в каждом направлении сетка. Вычислялись следующие параметры:

— среднеквадратичная скорость

$$V_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\left\{\frac{1}{XYZ}\iiint\limits_A \left(u^2 + v^2 + w^2\right) dxdydz\right\}},$$

где A — объем параллелепипеда со сторонами X, Y и Z;

— число Нуссельта (Nu) по формуле [3]

$$\mathrm{Nu} = -(XY)^{-1}\iint\limits_{S_{\mathrm{top}}} \frac{\partial T}{\partial z} dxdy,$$

где S_{top} — верхняя поверхность параллелепипеда;

— значение вертикальной компоненты скорости w и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя;

— значение теплового потока $\vartheta = -\partial T/\partial z$ в угловых точках верхней поверхности куба;

— интегральный параметр, вычисляемый по формуле $\tau\left(x, z\right) = \int\limits_0^Y \frac{\partial T}{\partial z} dy$ вдоль линии, параллельной оси Y, начинающейся точками (0, 0.25), (0.5, 0.25), (1, 0.25) фронтальной (XZ)-плоскости;

— средняя температура $T_m = \iint\limits_{S_z} T dxdy$, вычисляемая на горизонтальных сечениях области $S_{z=0.75}$ и $S_{z=0.50}$ на глубинах $z = 0.75$ и $z = 0.5$;

— значение вертикальной компоненты вектора завихренности ω^z в точке (0.75, 0.25, 0.75).

Интегралы вычислялись с применением квадратурной формулы трапеций.

Размерные значения (в системе СИ), которые были использованы в [1] и в настоящей работе, принимались следующими:

$$d = 2\,700\,000,\ \Delta T = 3700,\ \chi = 10^{-6},\ \alpha = 10^{-5},\ \rho = 3300,\ g_z = 10.$$

В качестве начального распределения температуры выбиралось распределение

$$T(x,y,z,t_0) = T_0(x,y,z) = (1-z) + 0.2(\cos(\pi x/X) + \cos(\pi y/Y))\sin(\pi z).$$

Результаты расчетов авторов (СТС) сопоставляются с данными Кристенсена (Chr) как наиболее полными из имеющихся в статье [1] и представлены в табл. 1 и 2. Ошибка вычислялась по формуле

$$\mathrm{Err} = \left|\frac{\mathrm{CTC} - \mathrm{Chr}}{\mathrm{Chr}}\right| \cdot 100\,\%.$$

Можно видеть, что результаты расчетов настоящей работы достаточно близки к результатам [1].

Хорошо известным эффективным подходом к решению задач математической физики является метод последовательности сеток [18]. Результаты его применения в настоящей работе иллюстрируются табл. 2.

При непосредственных вычислениях на сетке 48×48×48 потребовалось 660 мин 24 с на персональном компьютере с процессором Athlon 1000. Таким образом, выигрыш во времени счета на последовательности сеток более чем восьмикратный.

Т а б л и ц а 1. Результаты расчетов авторов и Кристенсена [1]

Наименование параметра	Результаты Кристенсена на сетке 32×32×64	Результаты авторов на сетке 32×32×32	Относительная ошибка (Err), %
Nu	3.0393	3.0400	0.0240
$Vrms$	35.132	35.180	0.1366
w(1,1,0.5)	–58.230	–58.230	0.0000
T(1,1,0.5)	0.2393	0.2379	0.5643
ϑ(1,1)	0.7684	0.7731	0.6117
$\tau(1,1)$	–0.1388	–0.1356	2.3055
$T_m(0.50)$	0.5816	0.5799	0.2889
$\omega^z(0.75, 0.25, 0.75)$	–11.125	–11.25	1.1236

Т а б л и ц а 2. Расчеты авторов на последовательности сеток

Наименование параметра	Результаты Кристенсена на сетке 32×32×64	Результаты авторов на сетках		
		12×12×12	24×24×24	48×48×48
Nu	3.0393	3.2450	3.0397	3.040
$Vrms$	35.132	37.970	35.360	35.07
$W(1,1,0.5)$	–58.230	–60.68	–58.262	–58.42
$T(1,1,0.5)$	0.2393	0.2326	0.2377	0.239
$\vartheta(1,1)$	0.7684	0.8017	0.7804	0.773
$\tau(1,0.25)$	–0.1388	–0.0676	–0.1341	–0.140
$T_m(0.50)$	0.5816	0.5844	0,5792	0.582
$\omega^z(0.75, 0.25, 0.75)$	–11.125	–11.030	–11.203	–11.35
Время счета		65 с	119 с	4811 с

Существенный выигрыш во времени счета может быть достигнут также с применением экстраполяции по Ричардсону [19]. В частности, на рассмотренной модельной задаче [1] дополнительный выигрыш (для сеток 12×12×12, 24×24×24, 48×48×48) составил ≈ 24 раза. При этом рассчитанные на первых двух сетках решения комбинировались и сопоставлялись с расчетом на третьей сетке:

$$\Phi_{i,j,k}^{m+1,m} = \left(4 \cdot \Phi_{2i-1,2j-1,2k-1}^{m+1} - \Phi_{i,j,k}^{m}\right)/3;$$

значения индексов i, j, k изменяются от 1 до своих максимальных значений, а индекс $m = 1, 2, 3$ означает номер сетки в последовательности; Φ — одна из искомых функций.

Приведенные выше результаты численных экспериментов свидетельствуют о достаточно высокой эффективности и конкурентоспособности построенной численной модели. Отметим, что в [17] при решении двумерных гидродинамических задач конвекции на последовательности сеток получен выигрыш в 3–5 раз.

В процессе расчетов дополнительно осуществлялся контроль закона сохранения тепла. Следствием исходных дифференциальных уравнений, начального и граничных условий является закон сохранения тепла

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\mathrm{A}} T d\mathrm{A} = \iint\limits_{S_{\mathrm{top}}(z=1)} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dxdy - \iint\limits_{S_{\mathrm{bottom}}(z=0)} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dxdy.$$

Для его проверки осуществлялась последовательность вычислений.

1. На каждом шаге по времени $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \tau_k$ вычисляются интегралы

$$I_n = \iiint\limits_{A} T dA, \quad I_{n,\mathrm{top}} = \iint\limits_{S_{\mathrm{top}}(z=1)} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dxdy, \quad I_{n,\mathrm{bottom}} = \iint\limits_{S_{\mathrm{bottom}}(z=0)} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dxdy.$$

2. Сравнивается величина I_n с величиной

$$I_0 + \sum_{k=0}^{n} (I_{k,\mathrm{top}} - I_{k,\mathrm{bottom}})\tau_k, \quad E_n = I_n - \left[I_0 + \sum_{k=0}^{n} (I_{k,\mathrm{top}} - I_{k,\mathrm{bottom}})\tau_k\right].$$

Результаты контроля закона сохранения тепла, полученные на сетке 32×32×32, представлены в табл. 3. Для сравнения в последнем столбце помещены результаты расчетов на сетке 48×48×48.

Т а б л и ц а 3. Анализ закона сохранения тепла

t, млн лет	$\lvert E_n \rvert$	$\lvert E_n/I_0 \rvert$	$\lvert(I_{n,\mathrm{top}} - I_{n,\mathrm{bottom}})/I_0\rvert$ на сетке 32×32×32	$\lvert(I_{n,\mathrm{top}} - I_{n,\mathrm{bottom}})/I_0\rvert$ на сетке 48×48×48
51.7	$1.17 \cdot 10^{-5}$	$2.13 \cdot 10^{-5}$	$2.20 \cdot 10^{-5}$	$3.66 \cdot 10^{-6}$.
460.9	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$2.83 \cdot 10^{-4}$	$8.80 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-6}$
918.5	$2.99 \cdot 10^{-4}$	$5.44 \cdot 10^{-4}$	$7.32 \cdot 10^{-6}$	$1.20 \cdot 10^{-7}$
1364.5	$4.32 \cdot 10^{-4}$	$7.86 \cdot 10^{-4}$	$7.01 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-7}$
1711.2	$5.35 \cdot 10^{-4}$	$9.73 \cdot 10^{-4}$	$6.83 \cdot 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-7}$
1991.6	$6.17 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-3}$	$6.65 \cdot 10^{-6}$	$1.10 \cdot 10^{-7}$
2104.1	$6.51 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$6.56 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$

Выход на стационарное решение в интегральном смысле характеризуется поведением $(I_{n,\mathrm{top}} - I_{n,\mathrm{bottom}})/I_0$. Интегралы вычислялись по-прежнему с помощью квадратурных формул трапеций.

В целях краткости результаты расчетов конвекции в реальных геодинамических ситуациях в настоящей заметке не приводятся. Некоторые результаты численного моделирования, демонстрирующие существенно трехмерную структуру конвекции в верхней мантии Земли, представлены в [20, 21].

Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена трехмерная численная модель конвекции в мантии Земли, основанная на методе дробных шагов, последовательности сеток и экстраполяции по Ричардсону; осуществлено ее детальное тестирование.

Список литературы

[1] Busse F.H., Christensen U., Clever R. et al. 3D Convection at infinite Prandl number in cartesian geometry — a benchmark comparison // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1993. Vol. 75. P. 39–59.

[2] Gable W., O'Connell J. Convection in three dimensions with surface plates: generation of toroidal flow // J. Geophys. Research. 1991. Vol. 96, N B5. P. 8391–8405.

[3] Glatzmaier G.A., Schubert G. Three-dimensional spherical model of layered and whole mantle convection // J. Geophys. Research. 1993. Vol. 98, N B12. P. 21969–21976.

[4] Machetel P., Thoravan C., Brunet D. Spectral and geophysical of 3-D spherical mantle convection with an endothermic phase change at the 670 km discontinuity // Phys. Earth and Planetary Interiors. 1995. Vol. 88. P. 43–51.

[5] Рыков В.В., Трубицин В.П. Численное моделирование трехмерной мантийной конвекции и тектоника литосферных плит // Вычисл. сейсмология. 1994. Вып. 26. С. 94–102.

[6] Рыков В.В., Трубицин В.П. Трехмерная модель мантийной конвекции с движущимися континентами // Вычисл. сейсмология. 1994. Вып. 27. С. 21–41.

[7] Zhong S., Zuber M. Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection // J. Geophys. Research. 2000. Vol. 105, N B5. P. 11063–11082.

[8] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.

[9] Бессонов О.А., Брайловская В.А., Полежаев В.И. Пространственные эффекты конвекции в расплавах: концентрационные неоднородности, возникновение несимметрии и колебания // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 3. С. 74–82.

[10] Sparks D.W., Parmentier E.M., Morgan J.P. Three-dimensional mantle convection beneath spreading centers implications for along-axis variations in crustal thickness and gravity // J. Geophys. Research. 1993. Vol. 98, N B12. P. 21977–21995.

[11] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

[12] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 1. С. 114–125.

[13] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 85–92.

[14] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. Численная модель трехмерной конвекции в верхней мантии Земли // Selected Papers of the Intern. Conf. "Fluxes and Structures in Fluids". St. Petersburg, Russia, June 23–26, 2003. M. IPM RAS, 2004. P. 238–241.

[15] Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Глубинная геодинамика. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 409 с.

[16] Федорюк М.В. Характеристики течений несжимаемой жидкости в гравитационном поле // Мат. сб. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 483–499.

[17] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.

[18] Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 559–564.

[19] Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности разностных схем. М.: Наука, 1979.

[20] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. Численная модель трехмерной конвекции в верхней мантии Земли // Физика Земли. 2005. № 5. С. 48–64.

[21] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 2. С. 248–254.

Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.