

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ И УТОЧНЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

В. П. ЖИТНИКОВ, Г. И. ФЕДОРОВА, О. Р. ЗИННАТУЛЛИНА
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия
e-mail: zhitnik@ugatu.ac.ru

Transient processes that lead to stationary, self-similar or other limiting modes occurring in non-stationary electrochemical machining, are considered. Problems of the accuracy increase and error estimation are dealt by extrapolation of the approximate solutions on nod number and step of numerical integration.

Введение

При электрохимической обработке деталь является анодом, электрод-инструмент (ЭИ) — катодом. Межэлектродное пространство (МЭП) заполняется электролитом, к электродам подключается источник тока, и происходит электрохимическое растворение материала анода. Ниже рассматриваются процессы, в которых электропроводность электролита κ постоянна во времени и в пространстве.

В терминах теории функций комплексного переменного задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть задана некоторая область простой геометрической формы, например полоса $\chi = \sigma + iv$. В каждый момент времени t требуется найти аналитические функции $Z(\chi, t) = X + iY$ и $W(\chi, t) = \Phi + i\Psi$ (конформные отображения полосы на область МЭП и соответствующую ей область плоскости комплексного потенциала). При этом производная dW/dZ при фиксированном t в любой точке области МЭП и на границах равна величине \bar{E} — комплексно-сопряженной напряженности электрического поля. Плотность тока j согласно закону Ома равна κE .

При нестационарной электрохимической обработке форма области МЭП меняется со временем, положение границы, соответствующей ЭИ, определяется скоростью подачи ЭИ, а изменение формы границы обрабатываемой детали — скоростью электрохимического растворения. Скорость электрохимического растворения V_{ecm} в соответствии с законом Фарадея пропорциональна нормальной к границе составляющей напряженности E_n :

$$V_{\text{ecm}} = kE_n, \quad (1)$$

где k — электрохимическая постоянная [1, 2].

Задача электрохимической обработки с условием (1) эквивалентна известной задаче Хеле — Шоу со свободной границей [3]. Для решения таких задач весьма успешно применяются методы конечных и граничных элементов, которые очень удобны для расчета процессов в МЭП различной формы [4, 5]. Однако простота и удобство методов обычно сопровождаются и частично объясняются низким порядком точности (как правило, первым). При этом весьма трудно уменьшить погрешность за счет увеличения числа узловых точек или уменьшения длины шага из-за нелинейного роста времени счета. Например, при первом порядке точности для уменьшения погрешности в десять раз может потребоваться увеличение времени счета в 100–1000 раз, что может оказаться нереальным. Это требует разработки методов, позволяющих увеличить порядок точности.

Ниже для вычисления сдвига границы при шаге по времени решается краевая задача для аналитической функции $\frac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t)$ с граничным условием (1), записанным в форме [6]

$$\text{Im} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \right) = -k \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (2)$$

Эта задача представляет собой задачу Римана — Гильберта, уравнение (2) эквивалентно уравнению Полубариновой — Галина [7] для задачи Хеле — Шоу. Решение уравнения (2) относительно $\frac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t)$ может быть выражено аналитически с помощью интеграла Шварца. Однако с целью получения более точных результатов на длинном промежутке времени требуется изменение метода и схемы решения.

1. Нестационарная обработка проволочным ЭИ

Рассмотрим задачу обработки проволочным (в сечении точечным) ЭИ. Форма межэлектродного пространства показана на рис. 1, *а*, где ADB — граница растворяемого металла, C — точка расположения ЭИ. Форма области на плоскости комплексного потенциала изображена на рис. 1, *б*.

Для расчетов более удобно использовать безразмерные переменные. В частности, комплексный потенциал представляется в виде $W = wI/\kappa = (\varphi + i\psi)I/\kappa$. Безразмерные координаты и время вводятся следующим способом:

$$z = Z/l, \quad x = X/l, \quad y = Y/l, \quad \tau = k\eta Ut/l^2, \quad (3)$$

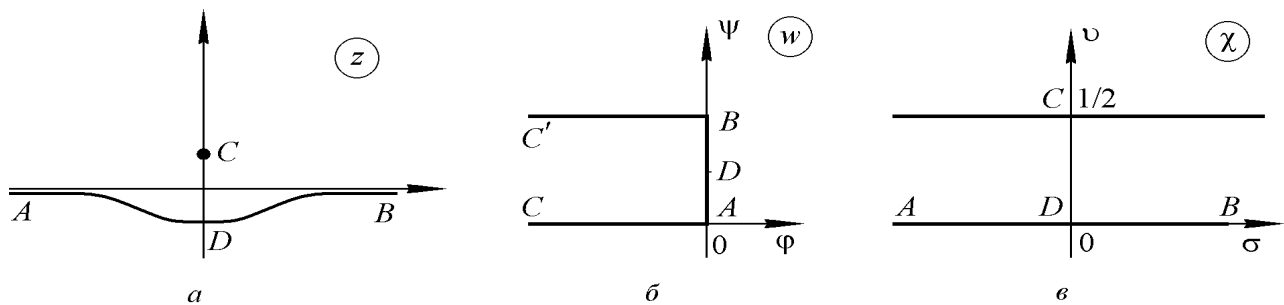


Рис. 1. Формы области, соответствующей МЭП: *а* — на физической плоскости; *б* — на плоскости комплексного потенциала; *в* — на параметрической плоскости.

где l — характерный размер, не зависящий от времени. Для ЭИ, движущегося со скоростью V_{et} по направлению к детали, значение l принимается равным стационарному зазору при обработке в плоскопараллельном МЭП ($l = k\eta U/|V_{et}|$). Тогда безразмерная скорость равна 1. Безразмерное время равно безразмерному сдвигу ЭИ.

2. Метод решения задачи

Обычно применяемые методы сводятся к следующей схеме решения.

1. При заданной начальной форме анода и катода находятся значения напряженности электрического поля в выбранных точках анода.

2. Выполняется шаг по времени, в ходе которого согласно закону Фарадея происходит смещение каждой точки по нормали к поверхности, пропорциональное нормальной составляющей напряженности электрического поля в этой точке $dZ = kE_n dt$.

3. По точкам восстанавливается форма поверхности и делается возврат к п. 1.

При решении задач численными методами по этой схеме возможно неуправляемое сближение узловых точек на отдельных участках, приводящее к ухудшению сходимости [5]. Определение частной производной по времени (2) позволяет при решении нестационарной задачи производить временной сдвиг поверхности вдоль вектора $dz = \frac{\partial z}{\partial \tau} d\tau$. Это дает возможность закрепить узловые точки на границе области плоскости параметрического переменного или проводить их управляемое изменение, что значительно упрощает решение нестационарной задачи [8, 9].

Отображение полосы $\chi = \sigma + i\nu$ ширины $1/2$ (рис. 1, в) на область плоскости комплексного потенциала осуществляется функцией

$$w = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + ie^{\pi\chi}}{1 - ie^{\pi\chi}}, \quad \frac{dw}{d\chi} = \frac{i}{\cosh \pi\chi}.$$

Теперь необходимо найти конформное отображение $z(\chi, 0)$ полосы $\chi = \sigma + i\nu$ на область физической плоскости z , соответствующую начальной форме МЭП. Для плоской начальной поверхности детали это отображение имеет вид

$$z(\chi, 0) = g(0) \sinh \pi\chi = g(0) z_0(\chi), \quad g > 0. \quad (4)$$

Функция $z(\chi, \tau)$ ищется в виде суммы $z(\chi, \tau) = g(\tau) z_0(\chi) + z_\Delta(\chi, \tau)$, так чтобы $Im z_\Delta(\sigma + i\nu, \tau) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \pm\infty$. Если начальное положение точечного ЭИ $z_C = 0 + iy_C$, то $g(0) z_0(i/2) = z_C$ и $g(0) = y_C$. Решение ищется в узловых точках σ_m , $m = 0, \dots, n$. Искомыми на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta\tau$ являются значения $y_m = Im z_\Delta(\sigma_m, \tau_j)$. Значения $y_\Delta(\sigma, \tau_j) = Im z_\Delta(\sigma, \tau_j)$ во внутренних между узлами точках определяются с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

На прямой $\chi = \sigma + i/2$ $Re z_\Delta(\sigma + i/2, \tau) = 0$, поэтому функция $z(\chi, \tau)$ может быть аналитически продолжена на полосу ширины 1. Тогда на верхней границе $\chi = \sigma + i$ имеем $Im z_\Delta(\sigma + i, \tau) = Im z_\Delta(\sigma, \tau)$. Следовательно, для определения функции $z_\Delta(\chi, \tau)$ можно использовать интеграл Шварца

$$z_\Delta(\chi, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_\Delta(\sigma, \tau) \coth \frac{\pi}{2} (\sigma - \chi) d\sigma - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_\Delta(\sigma, \tau) \tanh \frac{\pi}{2} (\sigma - \chi) d\sigma. \quad (5)$$

С помощью дифференцирования сплайна по σ можно найти производную $\partial z_\Delta / \partial \chi$:

$$\frac{\partial z_\Delta}{\partial \chi}(\chi, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \coth \frac{\pi}{2}(\sigma - \chi) d\sigma - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \tanh \frac{\pi}{2}(\sigma - \chi) d\sigma. \quad (6)$$

Для определения производной $\partial z_\Delta / \partial \tau$ также используются сплайн-аппроксимация и интеграл Шварца, аналогичный (5).

Для данного представления решения задачи граничное условие (2) принимает вид

$$-\frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\Delta}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{dg}{d\tau} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \sigma} \sinh \pi \sigma. \quad (7)$$

Выражение (5) для $\chi = i/2$ используется для определения $g(\tau)$ и $dg/d\tau$ при заданных зависимостях $z_C = 0 + iy_C(\tau)$ и $\frac{dy_C}{d\tau}(\tau)$:

$$y_C(\tau) = g(\tau) + y_\Delta\left(\frac{i}{2}, \tau\right) = g(\tau) + 2 \int_0^{\infty} y_\Delta(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\cosh \pi \sigma}; \quad (8)$$

$$\frac{dy_C}{d\tau}(\tau) = \frac{dg}{d\tau}(\tau) + \frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau}\left(\frac{i}{2}, \tau\right) = \frac{dg}{d\tau}(\tau) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau} \frac{d\sigma}{\cosh \pi \sigma}. \quad (9)$$

Численно задача решается методом коллокаций. Уравнение (7) выполняется в точках σ_m . Полученная система линейных алгебраических уравнений решается численно относительно параметров $\frac{\partial y_\Delta}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j)$. Затем выполняется шаг по времени с помощью усовершенствованного метода Эйлера второго порядка точности.

3. Численные результаты

Решение задачи для неподвижного ЭИ при различных начальных формах детали [10] показало быструю сходимость к автомодельному решению (в котором сохраняется геометрическое подобие МЭП), определяемому формулой [11]

$$z = \frac{\sinh \pi \chi - i}{\sinh \pi \chi + i} (\sinh \pi \chi + 2i) \sqrt{\frac{\tau}{3\pi}}. \quad (10)$$

Результаты решения задачи об обработке ЭИ, движущегося с постоянной скоростью, равной 1, перпендикулярно к плоской начальной поверхности, показаны на рис. 2 (графики повернуты на 90°). Положение ЭИ обозначено точками.

Разработанный метод позволяет начать процесс с критической конфигурации, когда ЭИ касается поверхности детали ($y_C(0) = 0$ при $\tau = 0$). Предполагается, что вначале имеет место автомодельный процесс (10). Это предположение базируется на двух фактах:

- в начальное время скорость растворения намного больше скорости движения ЭИ;
- автомодельная форма является аттрактором.

Тогда, используя (10), можно получить соотношение между безразмерным временем и сдвигом нижней точки растворяемой поверхности $\Delta_\tau = \frac{3\pi}{4} \Delta_y^2$, где Δ_τ — безразмерное

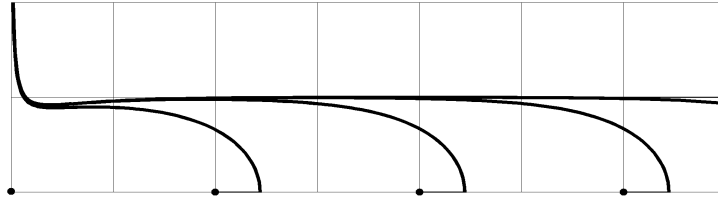


Рис. 2. Формирование финальной и стационарной форм поверхности.

время автомодельного шага, Δ_y — соответствующий сдвиг нижней точки поверхности. Поскольку ЭИ движется, Δ_τ равен сдвигу ЭИ, т. е. погрешности такого моделирования. Однако если $|\Delta_y| \ll 1$, то $\Delta_\tau \ll |\Delta_y|$.

На рис. 2 показано установление стационарного процесса в окрестности ЭИ. Стационарная форма дается формулой [1] $y = -\frac{1}{\pi} \ln(2 \cos \pi x)$.

Вблизи зоны входа ЭИ в тело детали происходит установление финальной формы обрабатываемой поверхности. Видно сужение прорези, которое объясняется близостью начального положения ЭИ к поверхности детали. Расчеты показывают, что это сужение быстро исчезает при увеличении начального зазора. Численные характеристики формы и оценки погрешности их вычисления приводятся ниже.

4. Экстраполяция и оценка погрешности

При отсутствии аналитических способов самой надежной оценкой погрешности является разность между приближенным и точным результатами. Но это возможно только для тестовых примеров, имеющих аналитическое решение. Распространение такой оценки на другие примеры очень ненадежно. Выход может быть найден, если вместо точного использовать приближенное, но более точное по сравнению с проверяемым значение. Это более точное значение может быть всего в три раза точнее, чем проверяемое. Однако при этом возникают два вопроса: как получить это более точное значение и как проверить, что оно действительно точнее исходного?

Более точное значение можно получить, пользуясь тем же способом, что и при вычислении проверяемого. Но это вызывает дополнительные требования к ресурсам, которые могут оказаться невыполнимыми. Есть и другой способ — использовать более грубые результаты (с меньшим числом узлов и временем счета). Если погрешность метода подчиняется некоторому закону, то, зная этот закон (в виде характера зависимости, например степенной, экспоненциальной и т. п.), можно по нескольким результатам провести идентификацию и экстраполяцию и приближенно предсказать значение, соответствующее бесконечному числу узлов.

Ответить на второй вопрос можно с помощью повторной экстраполяции, т. е. экстраполяции экстраполированных результатов, полученных для разных наборов исходных данных. В этом случае получается оценка погрешности экстраполированных результатов (или размытость оценки погрешности). Если эта оценка удовлетворяет требованиям: в три раза и более меньше оценки погрешности исходных данных (относительная размытость меньше 1/3), то цель достигнута. Если нет, то данный способ оценки в конкретном случае следует признать ненадежным.

Кроме того, при хороших оценках результаты экстраполяции можно использовать вместо исходных данных как более точные. При этом необходима дополнительная экстраполяция, чтобы убедиться в надежности полученных таким способом результатов. В некоторых случаях путем повторной экстраполяции можно получить результаты, на многие порядки более точные, чем рассчитанные непосредственно с помощью численного метода, чего невозможно было бы добиться прямым расчетом в связи с огромными затратами времени, превышающими разумные пределы [11, 12].

При применении экстраполяции самым существенным требованием является сохранение закона изменения погрешности в зависимости от числа узловых точек. При этом влияние других составляющих погрешности, не подчиняющихся данному закону или имеющих хаотичный характер, должно быть мало.

Рассмотрим эти дополнительные погрешности, которые могут влиять на результат применительно к рассматриваемой задаче и методу ее решения.

1. Погрешность округления или усечения, связанная с ограниченной длиной машинного слова (допустим, m двоичных разрядов). Например, при вычислении интегралов или решении задачи Коши для дифференциальных уравнений относительную погрешность округления приближенно можно оценить как $n \cdot 2^{-m+1}$, где n — число шагов интегрирования. Влияние этой погрешности может существенно возрасти, если результат интегрирования используется при вычислении производных или выражений, содержащих неопределенности типа $0/0$, $0 \cdot \infty$. В предложенном методе используется величина $g(\tau)$, которая изменяется от некоторого начального значения порядка 1 до 0 при $\tau \rightarrow \infty$ со скоростью $e^{-\pi\tau}$ (результат численных исследований). Эта величина умножается на бесконечно большую при $\chi \rightarrow \infty$ функцию, а поэтому оказывает существенное влияние на форму поверхности. Поскольку $g(\tau)$ вычисляется численным интегрированием дифференциального уравнения, результат содержит значительную долю погрешности. Это ограничивает диапазон исследования по τ .

2. При малом числе узлов (или отрезков разбиения n) погрешность метода может содержать составляющие, быстро убывающие с возрастанием n . Наличие этих составляющих может существенно исказить зависимость результата от n . Анализ этих составляющих затрудняется прежде всего существенным отличием их характера от основных и отсутствием априорной информации об их виде. Кроме того, из-за наличия большого числа составляющих, имеющих близкую величину, анализ существенно затрудняется. Это ограничивает число узлов снизу.

3. При большом числе узлов часто ухудшается обусловленность задачи, что может выразиться в возникновении колебаний аппроксимируемой поверхности. Эти колебания могут привести к изменению характера зависимости погрешности метода от n , что ухудшает качество экстраполяции. Это ограничивает число узлов сверху, причем это ограничение может оказаться более сильным, чем ограничение по вычислительным ресурсам. В данной задаче возникновение колебаний кривизны поверхности наблюдалось при $n > 400$.

4. Если искомым является экстремальное значение какого-либо параметра (например, кривизны), то различное положение точки экстремума относительно узлов сетки при сравнении результатов интерполяции на разных сетках может привести к существенной нерегулярной погрешности.

5. Для избежания появления дополнительной нерегулярной погрешности, вызванной повторной экстраполяцией, число узлов n_j в наборе исследуемых решений должно изменяться по определенному закону: обычно сохраняется либо разность $n_j - n_{j-1}$ (метод Нэвилла), либо отношение $Q = n_j/n_{j-1}$ (метод Ромберга). Методы экстраполяции, работа-

ющие при сохранении разности, как правило, экспоненциально накапливают погрешность. При сохранении отношения необходимо учитывать, что в наборе должно быть достаточное число решений (по крайней мере 5–6). Если $Q = 2$ (наименьшему целому числу больше 1), то в этом случае, если учесть ограничения на диапазон возможных n , совокупность требований может оказаться противоречивой. Выбирая Q дробным числом, например $3/2$, необходимо принимать во внимание, что округление числа узлов до целого приведет к появлению нерегулярной погрешности. Отсюда возникает дополнительная задача выбора плана исследований в виде конечной последовательности n_j , удовлетворяющей всем перечисленным ограничениям. Эта задача может быть решена только экспериментально применительно к каждой задаче, а может быть, даже к конкретному вычисляемому параметру.

Условия численного эксперимента и методов обработки результатов накладывают дополнительные требования к вычислительному алгоритму. Погрешность численного метода складывается из погрешностей частных методов, используемых в общем алгоритме решения задачи. Поэтому для сохранения закономерности изменения погрешности от числа узловых точек и шага по времени следует избегать во всех внутренних алгоритмах альтернатив, которые могут повлечь изменение зависимости погрешности. Например, в данном алгоритме при вычислении интегралов число узловых точек на каждом интервале разбиения всегда было фиксировано. При решении системы уравнений условие выхода на всех его стадиях устанавливалось с максимально возможной точностью.

5. Метод экстраполяции

При экстраполяции требуется априорное знание характера зависимости результата расчетов от числа узлов, например

$$z_n = z + c_1 n^{-k_1} + c_2 n^{-k_2} + \dots + c_L n^{-k_L} + \delta(n), \quad (11)$$

где z — точное значение; z_n — приближенный результат, полученный при числе узловых точек, равном n ; c_j — коэффициенты, которые предполагаются не зависящими от n ; $\delta(n)$ — величина, полагаемая малой по сравнению с $c_j n^{-k_j}$ при тех значениях n , которые использовались в данных конкретных расчетах; k_1, \dots, k_L — произвольные действительные числа.

Если решение задачи неособенное, то можно допустить возможность его разложения в ряд Тейлора, тогда k_j — это часть ряда натуральных чисел. Тогда к задаче нахождения предельного при $n \rightarrow \infty$ значения z можно подойти как к задаче интерполяции зависимости $z(x)$ от параметра $x = 1/n$ алгебраическим многочленом с последующей экстраполяцией до $x = 0$. Есть и другой подход, приводящий при условии постоянства $Q = n_j/n_{j-1} > 1$ к тому же алгоритму, но не требующий целочисленности k_j . Это решение задачи численной фильтрации, т. е. последовательное устранение степенных слагаемых суммы (11) при сохранении значения константы z . Рассмотрим два значения z_{n_1}, z_{n_2} , вычисленные при числе узлов, равном n_1 и $n_2 = Qn_1$ соответственно. Составим линейную комбинацию

$$H = \alpha_j z_{n_1} + \beta_j z_{n_2} = (\alpha_j + \beta_j) z + \dots + (\alpha_j n_1^{-k_j} + \beta_j n_2^{-k_j}) c_j + \dots$$

и потребуем, чтобы суммарный коэффициент при z был равен 1, а при c_j (для определенного j) равен нулю. Отсюда получим формулу фильтрации, которая совпадает с

экстраполяционной формулой Ричардсона:

$$z_{n_2}^* = z_{n_2} + \frac{z_{n_2} - z_{n_1}}{Q^{k_j} - 1}. \quad (12)$$

Проводя последовательно экстраполяцию по всем парам соседних значений, получим отфильтрованную зависимость, не содержащую член с n^{-k_j} :

$$z_n^* = z + c_1^* n^{-k_1} + \dots + c_{j-1}^* n^{-k_{j-1}} + c_{j+1}^* n^{-k_{j+1}} + \dots + c_L^* n^{-k_L} + \delta^*(n), \quad (13)$$

где

$$c_l^* = c_l \frac{Q^{k_j} - Q^{k_l}}{Q^{k_j} - 1}. \quad (14)$$

Заметим, что отфильтрованная последовательность $z_{n_j}^*$ содержит на один член меньше, чем исходная. Если она имеет больше одного члена, то ее также можно отфильтровать, устранив степенную составляющую с n^{-k_l} . Операции фильтрации можно повторять последовательно для $n^{-k_1}, \dots, n^{-k_L}$, если исходная последовательность содержит достаточное количество членов. Применение повторной экстраполяции известно под названием метода Ромберга. Но при этом возникает ряд ограничений.

Применение повторной экстраполяции приводит к изменению коэффициентов суммы (14). При $k_1 \gg k_j$ увеличение абсолютной величины коэффициентов может быть весьма существенным. Это ограничивает число возможных экстраполяций.

Величина $\delta(n)$ в (11) может оказаться суммой регулярной составляющей, имеющей вид cn^{-k} , и нерегулярной составляющей $\delta^{(0)}$, обусловленной погрешностью исходных данных, которая, например, связана с ограниченной разрядностью чисел в машинном представлении. Тогда исходная нерегулярная часть погрешности, содержащаяся в вычисленных значениях z_j , при каждой экстраполяции умножается на коэффициент

$$\delta^{(l)} \leq \delta^{(l-1)} + \frac{\delta^{(l-1)} + \delta^{(l-1)}}{Q^{k_l} - 1} = \frac{Q^{k_l} + 1}{Q^{k_l} - 1} \delta^{(l-1)}.$$

Для метода Ромберга, применяемого к последовательности (11) при $k_j = j$, произведение таких множителей ограничено числом, приблизительно равным 8, т. е. метод Ромберга устойчив к погрешности исходных данных, но сам уровень нерегулярной погрешности может ограничить число возможных экстраполяций.

6. Анализ результатов численного эксперимента

При решении задачи обработки проволочным ЭИ наибольший интерес представляет форма, которая устанавливается со временем в области начала врезания ЭИ в поверхность детали (рис. 2). По результатам численного решения задачи проведем экстраполяцию и оценку погрешности двух параметров установившейся формы: ширины паза в самом узком месте b и максимального по модулю значения кривизны поверхности K .

Поскольку предметом исследования являются параметры установившейся формы, сравнительные исследования приходится проводить по трем параметрам: времени τ , числу узлов n и шагу по времени $\Delta\tau$.

Исследование зависимостей искомых параметров от безразмерного времени τ показало, что установление происходит с экспоненциальной скоростью, так что для $\tau > 5$ изменения искомых значений с полученной ниже точностью не происходит.

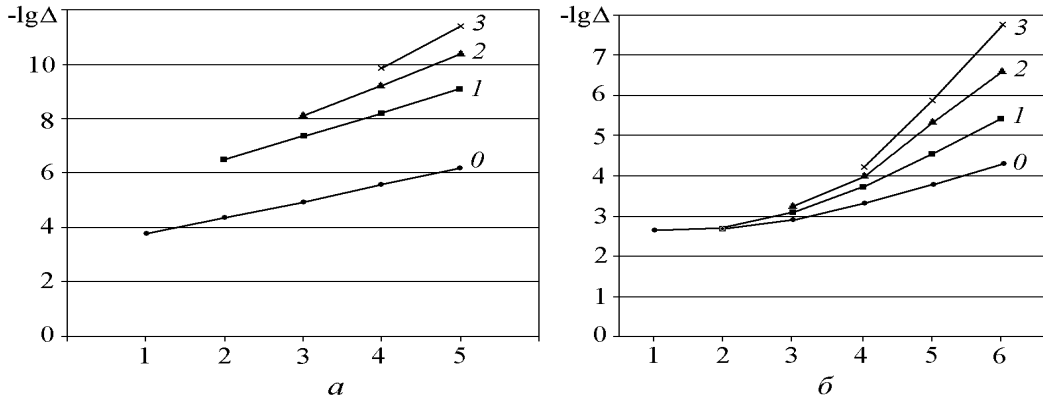


Рис. 3. Результаты экстраполяции b для $\tau = 5$: a — по Δ_τ при $n = 216$; b — по n .

Оценка величины ширины паза. Перейдем теперь к исследованию зависимости ширины паза b от шага по времени Δ_τ . В табл. 1 приведены результаты расчетов $b/2$ для трех значений Δ_τ при $n = 64 \dots 486$.

На рис. 3, a приведены результаты экстраполяционного исследования полученных результатов по Δ_τ . Для этого использовалась формула (12) при $k_j = 2, 3, \dots$. Результаты экстраполяции и оценки погрешности представлены в виде зависимости $-\lg \Delta$ (десятичного логарифма относительной погрешности) от $-\log_2 \frac{\Delta_{\tau_j}}{\Delta_{\tau_1}}$, $j = 1, \dots, 5$, кривая 0 соответствует погрешности расчетных данных, кривые $1-3$ отвечают результатам первой, второй и третьей экстраполяций.

В результате анализа можно утверждать, что вычисленные значения имеют 4–6 точных десятичных знаков, результат первой экстраполяции — 7–9 знаков при относительной размытости менее 0.1 (имеется в виду погрешность относительно предельных при $\Delta_\tau \rightarrow 0$ значений для каждого n).

Результаты третьей экстраполяции по Δ_τ используются для экстраполяции по n (рис. 3, b). Применялась формула (12) при $k_j = 3, 5, \dots$. По оси ординат, как и выше, показаны логарифмы оценок относительных погрешностей $-\lg \Delta$, по оси абсцисс — $\log_{1.5} \frac{n_j}{n_1}$, $j = 1, \dots, 6$. Видно, что результаты расчетов имеют максимально четыре точных цифры, результаты второй экстраполяции при $\tau = 5$ уверенно показывают шесть точных цифр. Относительная размытость оценки составляет около 0.1. Для $\tau = 7$ точность несколько падает (для $\tau > 7$ по указанным выше причинам точность падает более резко).

Т а б л и ц а 1. Результаты расчетов $b/2$ для $\tau = 6$

| n | $\Delta_\tau = 4 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta_\tau = 1 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta_\tau = 0.25 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta_\tau = 0$ (третья экстраполяция) |
|-----|---------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|--|
| 64 | 0.460915293 | 0.460863275 | 0.460860053 | 0.460859849 |
| 96 | 0.461073783 | 0.461003319 | 0.460998958 | 0.460998667 |
| 144 | 0.460654354 | 0.460568729 | 0.460563424 | 0.460563070 |
| 216 | 0.460295972 | 0.460201274 | 0.460195409 | 0.460195019 |
| 324 | 0.460123291 | 0.460024528 | 0.460018409 | 0.460018002 |
| 486 | 0.460060656 | 0.459961150 | 0.459954934 | 0.459954521 |

Таким образом, ширину паза в месте сужения можно представить в виде интервала $b = 0.919850 \pm 1 \cdot 10^{-6}$.

Оценка кривизны. Поскольку значение кривизны требует двойного дифференцирования полученных зависимостей, точность ее вычисления может быть намного хуже по сравнению с линейными размерами. Для вычисления кривизны использовали три способа: непосредственное дифференцирование полученных зависимостей $x(\sigma)$, $y(\sigma)$; конечно-разностную аппроксимацию первых и вторых производных по узловым значениям координат; вычисление радиуса окружности по трем соседним узловым точкам с последующей интерполяцией и определением экстремума. Все три способа дали непротиворечивые оценки, но последние два, как показали исследования, оказались более точными, а третий, кроме того, дал более стабильные результаты, позволившие провести экстраполяцию.

В табл. 2 приведены результаты расчетов значений максимальной по модулю кривизны K для разных Δ_τ при $n = 64 \dots 486$.

На рис. 4, а показаны зависимости погрешности вычисления кривизны K от шага по времени Δ_τ . Результаты оценки позволяют утверждать, что значения, вычисленные при $\Delta_\tau = 1 \cdot 10^{-3}$, имеют четыре верных цифры (относительно предельных при $\Delta_\tau \rightarrow 0$ значений), и этого оказывается достаточно для проведения экстраполяции по n .

Для экстраполяции по n применялась формула (12) при $k_j = 2, 3, \dots$. Были использованы результаты для $\Delta_\tau = 1 \cdot 10^{-3}$, $n = 144, 216, 324, 486, 729$ ($Q = 3/2$). Из рис. 4, б видно, что результаты расчетов имеют максимально две точных цифры. Линии, соответствующие результатам экстраполяции, имеют сложный вид, что объясняется влиянием других составляющих погрешности. Линия первой экстраполяции пересекает уровень трех цифр, остальные превышают первую только в конце графика ($n = 486, 729$). Тем не менее эти

Т а б л и ц а 2. Результаты расчетов K для $\tau = 6$

| n | $\Delta_\tau = 4 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta_\tau = 1 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta_\tau = 0.5 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta_\tau = 0.25 \cdot 10^{-3}$ |
|-----|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 64 | -4.75604335 | -4.75836460 | -4.75848023 | -4.75850916 |
| 96 | -7.18376249 | -7.18926201 | -7.18953728 | -7.18960612 |
| 144 | -8.64013510 | -8.65010887 | -8.65061065 | -8.65073631 |
| 216 | -10.3088758 | -10.3234799 | -10.3242201 | -10.3244052 |
| 324 | -10.8565058 | -10.8710569 | -10.8717962 | -10.8719821 |
| 486 | -11.1075235 | -11.1214019 | -11.1221124 | -11.1222917 |

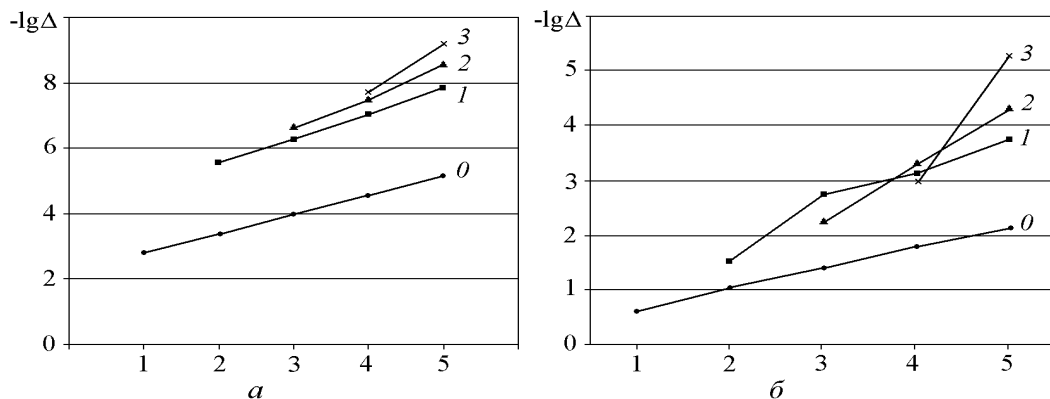


Рис. 4. Результаты экстраполяции K для $\tau = 7$: а — по Δ_τ при $n = 144$; б — по n .

результаты последующих экстраполяций позволяют оценить относительную размытость (меньше 0.1) оценки первой.

По результатам расчетов, экстраполяции и оценок максимальная по модулю кривизна установившейся поверхности находится в интервале $K = -11.30 \pm 0.01$.

Выводы

Проведенное исследование показало, что при нестационарном электрохимическом формообразовании на разных участках обрабатываемой поверхности формируются (иногда временно) стационарные, автомоделные или другие конфигурации, причем первые два типа конфигураций могут быть рассчитаны независимо, а многие имеют аналитическое представление. Этот вывод имеет большое практическое значение, так как сложная поверхность может быть приближена комбинацией простых.

Анализ и экстраполяционное исследование результатов численного эксперимента позволили уточнить полученные результаты по количеству верных цифр в 1.5 раза, оценить погрешность и размытость полученных оценок.

Список литературы

- [1] Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1984.
- [2] Житников В.П., Зайцев А.Н. Математическое моделирование электрохимической размерной обработки. Уфа: Изд-во УГАТУ, 1996. 221 с.
- [3] HOWISON S.D., OCKENDON J.R., LACEY A.A. Singularity development in moving boundary problems // Q. J. Mech. Appl. Math. 1985. Vol. 38, N 3. P. 343–360.
- [4] VOLGIN V.M., DAVYDOV A.D. Modeling of multistage electrochemical shaping // J. of Materials Proc. Technology. 2004. Vol. 149, N 1–3. P. 466–471.
- [5] PURCAR M., BORTELS L., VAN DEN BOSSCHE B., DECONINCK J. 3D electrochemical machining computer simulations // Ibid. P. 472–478.
- [6] ZHITNIKOV V.P., FEDOROVA G.I., ZINNATULLINA O.R. Quasi-analytical method of calculation of nonstationary electrochemical shaping // 2nd Intern. Summer Scientific School “High Speed Hydrodynamics”. Cheboksary, 2004. P. 313–317.
- [7] ПОЛУВАРИНОВА-КОЧИНА П.Я. О нестационарном движении в теории фильтрации // Прикл. математика и механика. 1945. Т. 1, № 9. С. 79–90.
- [8] Житников В.П., Ураков А.Р., Гуцунаев А.В. Численно-аналитический метод решения нестационарных задач электрохимической размерной обработки // Электронная обработка материалов. 1999. Т. 196, № 2. С. 4–9.
- [9] ZHITNIKOV V.P., FEDOROVA G.I., ZINNATULLINA O.V., KAMASHEV A.V. Simulation of nonstationary processes of electrochemical machining // J. of Materials Proc. Tech. 2004. Vol. 149, N 1–3. P. 398–403.

- [10] ЖИТНИКОВ В.П., УРАКОВ А.Р. Автомодельные решения нестационарных задач электрохимической обработки // Изв. вузов. Машиностроение. 1998. Т. 1, № 4–6. С. 108–115.
- [11] ЖИТНИКОВ В.П., ШЕРЫХАЛИНА Н.М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вест. УГАТУ. 2000. № 2. С. 53–60.
- [12] SHERYKHALINA N.M., ZHITNIKOV V.P. Application of extrapolation methods of numerical results for improvement of hydrodynamics problem solution // Comp. Fluid Dynamics J. 2002. Vol. 11, N 2. P. 155–160.

Поступила в редакцию 20 февраля 2006 г.