ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА НА ПРОСТРАНСТВЕ $\widetilde{W}_p^{m}$*

М. Д. Рамазанов
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: `ramazanovmd@yandex.ru`

Two terms in the asymptotic of the coefficient of periodic optimal cubature formula in $\widetilde{W}_p^m$ space are calculated.

Вычислим оптимальную на $\widetilde{W}_2^\mu$ решетчатую кубатурную формулу для интегрирования по $Q=[0,1)^n$. Здесь пространство $\widetilde{W}_2^\mu$ определяется как замыкание конечных рядов Фурье $f(x)=\sum\limits_k f_k e^{2\pi ikx}$ в норме

$$\|f|\widetilde{W}_2^\mu\| = \left(\int\limits_Q dx|\sum_k f_k\mu(k)e^{2\pi ikx}|^2\right)^{1/2},$$

где μ полагаем комплекснозначной не обращающейся в нуль функцией, и пусть $\mu(0)=1$. Вложение $\widetilde{W}_2^\mu \subset\subset C$ обеспечивается требованием $\sum|1/\mu(k)|^2<\infty$. Функционал погрешности этой кубатурной формулы есть ($1/h$ — целые числа)

$$l_h^{Q,\mathrm{opt}}(x)=\chi_Q(x)-h^n\sum_{hk\in Q}c_k^{\mathrm{opt}}(h)\delta(x-hk)=$$

$$=\chi_Q(x)-h^nc_0(h)\sum_{hk\in Q}\delta(x-hk).$$

Благодаря строгой выпуклости единичного шара в $(\widetilde{W}_2^\mu)^*=\widetilde{W}_2^{1/\mu}$ оптимальная формула единственна. Как периодическая обобщенная функция она разлагается в ряд Фурье

$$l_h^{Q,\mathrm{opt}}(x)=\sum_t l_te^{2\pi itx},\quad l_t=(l_h^{Q,opt}(x),e^{-2\pi itx}).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 14 Президиума РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00597).

Норма функционала погрешности в $\widetilde{W}_2^{1/\mu}$ есть

$$\|l_h^{\mathrm{opt}}|\widetilde{W}_2^{1/\mu}\| = \left[\sum_t |l_t|^2/|\mu(t)|^2\right]^{1/2}.$$

Вычислим коэффициенты Фурье $\{l_t\}$:

$$l_0 = (l_h^{Q,\mathrm{opt}}(x), 1) = 1 - c_0(h),$$

при $t \neq 0(\mathrm{mod}\ 1/h)$

$$l_t = (l_h^{Q,\mathrm{opt}}, e^{2\pi itx}) = -c_0(h)h^n \sum_{hk\in Q} e^{2\pi ithk} =$$

$$= -c_0(h)h^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1-e^{2\pi ihk_jt_j}}{1-e^{2\pi ihk_j}} = 0,$$

а при $t = \dfrac{r}{h}$, $r \in R^n \setminus 0$,

$$l_{r/h} = (l_h^{Q,\mathrm{opt}}(x), e^{2\pi irx/h}) = -c_0(h)h^n \sum_{hk\in Q} e^{2\pi irk} = -c_0(h).$$

Итак, $\|l_h^{\mathrm{opt}}|\widetilde{W}_2^{1/\mu}\|^2 = |1-c_0(h)|^2 + |c_0(h)|^2 \sum\limits_{r\neq 0}(1/|\mu(2\pi ri/h)|^2)$.

Очевидно, минимум этого выражения достигается при вещественном $c_0(h)$ и именно таком, что производная по $c_0(h)$ обращается в нуль. Это дает

$$c_0(h) = \frac{1}{1+\sum\limits_{r\neq 0}(1/|\mu(2\pi ri/h)|^2)}.$$

Возьмем $l_h^1(x)$ в виде

$$l_h^1(x) = \chi_Q(x) - h^n \sum_{hk\in Q} \delta(x-hk) = \sum_{hk\in Q} \lambda_M\left(\frac{x-hk}{h}\right),$$

где λ_M — элементарный функционал порядка M (здесь и дальше M будет целым четным числом $M \geq m$):

$$\lambda_M(x) = \chi_Q(x) - \sum_{s\in Z^n, |s|\leq S} a_s\delta(x-s), \quad (\lambda_M(x), x^\alpha) = 0, |\alpha| \leq M.$$

Имеем

$$\|l_h^1 - l_h^{Q,\mathrm{opt}}|\widetilde{W}_2^{1/\mu}\| = \|[1-c^{\mathrm{opt}}(h)]h^n \sum_{hk\in Q} \delta(x-hk)|\widetilde{W}_2^{1/\mu}\| =$$

$$= \sum_{r\neq 0}(1/|\mu(2\pi ri/h)|^2)(1+o(1)) = o(\|l_h^{Q,\mathrm{opt}}|\widetilde{W}_2^{1/\mu}\|),$$

т. е. $\{l_h^1\}$ является асимптотически оптимальной последовательностью функционалов погрешностей. Это верно и в общем случае.

Теорема. *Пусть банахово пространство* $\widetilde{B}$ *периодических функций* $f(x) = \sum\limits_k f_k e^{2\pi i k x}$ *удовлетворяет условиям*

$$\widetilde{B} \subset\subset C \quad \forall a \, \forall f \quad \|f(x+a)|\widetilde{B}\| = \|f(x)|\widetilde{B}\|, \quad \|f - f_0|\widetilde{B}\| \le \|f|\widetilde{B}\|.$$

Тогда последовательность функционалов погрешностей $\{l_h^1(x)\}_{h\to 0}$.

$$l_h^1(x) = \chi_Q(x) - h^n \sum_{kh\in Q} \delta(x - kh),$$

асимптотически оптимальна над пространством $\widetilde{B}$. *А если вместо последнего условия выполняется более жесткое:*

$$\|f\|_{\widetilde{B}} = \max\{|f_0|, \|f - f_0\|_{\widetilde{B}}\},$$

то $l_h^1(x)$ *становится оптимальным.*

Доказательство. Проверим сначала, что $\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| \to 0$ при $h \to 0$. Из первого условия теоремы следует, что вложение сопряженных пространств компактно ($\widetilde{C}^* \subset\subset \widetilde{B}^*$).

Так как $\{l_h^1(x)\}$ равномерно ограничено в $\widetilde{C}^*$,

$$\|l_h^1|\widetilde{C}^*\| \le \|\chi_Q|\widetilde{C}^*\| + h^n \sum_{kh\in Q} \|\delta(x-kh)|\widetilde{C}^*\| = 2,$$

то семейство $\{l_h^1(x)\}_{h\in H}$ компактно в $\widetilde{B}^*$.

Предположим, что норма $\|l_h^1|\widetilde{B}^*\|$ не стремится к нулю. В этом случае существует подпоследовательность $h_j \to 0$, для которой $l_{h_j}^1(x) \to l(x)$ и $\|l|\widetilde{B}^*\| = a > 0$. Тогда существует и функция $\varphi \in \widetilde{B}$, не зависящая от h, для которой $\langle l, \varphi\rangle \ge a/2$. Значит, при достаточно больших j $\langle l_{h_j}^1, \varphi\rangle \ge a/4$. Но $\varphi \in \widetilde{B} \subset C$ и вследствии непрерывности функции φ

$$\langle l_{h_j}^1, \varphi\rangle = \int\limits_Q \varphi(x)dx - h_j^n \sum_{kh_j\in Q} \varphi(kh_j) \to 0.$$

Противоречие доказывает, что $\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| \to 0$.

Известно, что оптимальный функционал $l_h^{Q,\mathrm{opt}}(x) \equiv l_h^0(x)$ имеет вид

$$l_h^0(x) = \chi_Q(x) - c_0(h)h^n \sum_{hk\in Q} \delta(x - hk).$$

Теперь покажем, что $c_0(h) \to 1$ при $h \to 0$. Для этого оптимальный функционал $l_h^0(x)$ запишем в виде $l_h^0(x) = (1 - c_0)\chi_Q(x) + c_0 l_h^1(x)$. Имеем

$$\|l_h^0|\widetilde{B}^*\| = \sup_{f\in\widetilde{B}} |\langle (1-c_0)\chi_Q + c_0 l_h^1, f\rangle / \|f|\widetilde{B}^*\|| \ge$$

$$\ge \sup_{f(x)\in\widetilde{B}, f_0=0} |\langle (1-c_0)\chi_Q + c_0 l_h^1, f\rangle / \|f|\widetilde{B}^*\|| =$$

$$= |c_0| \sup_{f(x)\in\widetilde{B}, f_0=0} [|\langle l_h^1, f\rangle| / \|f|\widetilde{B}^*\|] = |c_0| \sup_{f(x)\in\widetilde{B}} |\langle l_h^1, f - f_0\rangle| / \|f - f_0|\widetilde{B}^*\| =$$

$$= |c_0| \sup_{f(x)\in\widetilde{B}} \frac{|\langle l_h^1, f\rangle|}{\|f|\widetilde{B}^*\|}\cdot\frac{\|f|\widetilde{B}^*\|}{\|f-f_0|\widetilde{B}^*\|} \geq \text{(здесь применяем третье условие теоремы)}$$

$$\geq |c_0|\cdot\|l_h^1(x)|\widetilde{B}^*\|.$$

Значит, $|c_0|\leq 1$. Далее, $|1-c_0|\cdot\|\chi_Q|\widetilde{B}^*\| = \|l_h^{0,Q} - c_0 l_h^1|\widetilde{B}^*\| \leq 2\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| \to 0$ при $h\to 0$. Но $\|\chi_Q|\widetilde{B}^*\| = \mathrm{const}\neq 0$. Потому $|1-c_0|\leq C\cdot\|l_h^1|\widetilde{B}^*\|\to 0$ при $h\to 0$.

Таким образом,

$$\|l_h^0|\widetilde{B}^*\| \geq |c_0|\cdot\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| = (1+o(1))\|l_h^1|\widetilde{B}^*\|$$

и

$$1 \geq \|l_h^0|\widetilde{B}^*\|/\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| \geq 1+o(1) \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Это и означает асимптотическую оптимальность последовательности функционалов $\{l_h^1\}_{h\to 0}$.

Пусть теперь $\|f\|_B = \max\{|f_0|, \|f-f_0\|_{\widetilde{B}}\}$. Тогда

$$\|l_h^0|\widetilde{B}^*\| = \sup_f \frac{|\langle(1-c_0)\chi_Q + c_0 l_h^1, f\rangle|}{\max\{|f_0|, \|f-f_0|\widetilde{B}\|\}} =$$

$$= \sup_f \frac{|(1-c_0)f_0 + c_0\langle l_h^1, \dfrac{f-f_0}{\|f-f_0|\widetilde{B}\|}\rangle\|f-f_0|\widetilde{B}\||}{\max\{|f_0|, \|f-f_0|\widetilde{B}\|\}} =$$

$$= \sup_f [|1-c_0| + |c_0|\cdot|\langle l_h^1, \frac{f-f_0}{\|f-f_0|\widetilde{B}\|}\rangle|] = |1-c_0| + |c_0|\cdot\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| \geq$$

$$\geq |1-c_0| + |c_0|\cdot\|l_h^0|\widetilde{B}^*\|.$$

Отсюда следует $(1-|c_0|)\|l_h^1|\widetilde{B}^*\| \geq |1-c_0| \geq 1-|c_0|$, что возможно только при $|c_0|=1$. Значит, $\|l_h^0|\widetilde{B}^*\| = \|l_h^1|\widetilde{B}^*\|$, что и требовалось доказать.

Вычислим точнее коэффициенты $c_0(h)$ оптимальных кубатурных формул на пространствах $\widetilde{B} = \widetilde{W}_p^m$ с $p\in(1,\infty)$ и $m > n/p$. Возьмем нормы вида

$$\|f|\widetilde{W}_p^m(Q)\| = \left(\int_Q dx \sum_k f_k (1+|2\pi k|^{2k})^{m/2} e^{2\pi i k x}|^p\right)^{1/p}.$$

В случае целых четных m эти нормы совпадают с более традиционными

$$\|f|\widetilde{W}_p^m(Q)\| = \left(\int_Q dx |(1-\triangle)^{m/2} f(x)|^p\right)^{1/p},$$

употреблявшимися, например, в работах Ц.Б. Шойнжурова. Как и раньше, полагаем $h = \dfrac{1}{N}$ с целыми N. Мы имеем при $p' = \dfrac{p}{p-1}$

$$\|l_h^0|(\widetilde{W}_p^m(Q))^*\| = \|1 - c_0(h) + c_0(h) l^1|(\widetilde{W}_p^m(Q))^*\| =$$

$$= \left(\int_Q dx |1 - c_0 - c_0(h) \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi\beta x/h}}{(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} |2\pi\beta_k/h|^2)^{m/2}} |^{p'} \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_Q dx |1 - c_0(h) - h^m c_0(h) \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{(h^2 + |2\pi\beta|^2)^{m/2}} |^{p'} \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_Q dx |1 - c_0(h) - h^m \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{|2\pi\beta|^m} + h^m \sum_{\beta \neq 0} e^{2\pi i\beta x/h} \frac{[(h^2 + |2\pi\beta|^2)^{m/2} - |2\pi\beta|^m]}{|2\pi\beta|^m (h^2 + |2\pi\beta|^2)^{m/2}} + \right.$$

$$\left. + h^m [1 - c_0(h)] \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{(h^2 + |2\pi\beta|^2)^{m/2}} |^{p'} \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_Q dx |1 - c_0(h) - h^m \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{|2\pi\beta|^m} |^{p'} \right)^{1/p'} \pm$$

$$\pm \left[h^m \left(\int_Q dx \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{|2\pi\beta|^m (h^2 + |2\pi\beta|^2)^{m/2}} \int_0^1 dt \frac{m}{2} h^2 (th^2 + |2\pi\beta|^2)^{\frac{m}{2}-1} \right|^{p'} \right)^{1/p'} + \right.$$

$$\left. + h^m \cdot |1 - c_0(h)| \left(\int_Q dx | \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{(h^2 + |2\pi\beta|^2)^{m/2}} |^{p'} \right)^{1/p'} \right] \equiv I + II.$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках является бесконечно малой более высокого порядка, чем h^m. Во-первых, функции φ_1 и φ_2 дискретных аргументов, равные

$$\varphi_1(\gamma) = \frac{(t + |2\pi\gamma|^2)^{\frac{m}{2}-1}}{(1 + |2\pi\gamma|^2)^{\frac{m}{2}}}, \quad \varphi_2(\gamma) = \frac{|2\pi\gamma|^m}{(1 + |2\pi\gamma|^2)^{\frac{m}{2}}}$$

при $\gamma = \beta/h \neq 0$ и равные нулю при остальных $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, являются равномерно по h и t мультипликаторами рядов Фурье в пространстве $L_{p'}$, т. е. операторы

$$A_1: \quad \sum f_\gamma e^{2\pi i\gamma x} \to \sum f_\gamma \varphi_1(\gamma) e^{2\pi i\gamma x},$$

$$A_2: \quad \sum f_\gamma e^{2\pi i\gamma x} \to \sum f_\gamma \varphi_2(\gamma) e^{2\pi i\gamma x},$$

действующие в пространствах $L_{p'}$, $p' \in (1, \infty)$, ограничены равномерно по h и t. Поэтому выражение в квадратных скобках оценивается так:

$$II \leq \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \left[\frac{m}{2} h^2 \|A_1\| + (1 - c_0(h)) \|A_2\|\right] \left(\int_Q dx |b_m(x/h)|^{p'} \right)^{1/p'},$$

где $b_m(x) = \sum\limits_{\beta \neq 0} \dfrac{e^{2\pi i\beta x}}{|\beta|^m}$.

Во-вторых, так как $b_m(Q)$ — Q-периодическая функция, интеграл

$$\left(\int\limits_Q dx|b_m(x/h)|^{p'}\right)^{1/p'} = \left(h^n\int\limits_{Q/h} dy|b_m(y)|^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \left(\int\limits_Q dy|b_m(y)|^{p'}\right)^{1/p'} \equiv \|b_m|L_p(Q)\|$$

не зависит от h. Таким образом, $II = o(h^m)$. Точно так же

$$\left(\int\limits_Q dx|1-c_0(h)-h^m\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta x/h}}{|2\pi\beta|^m}|^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \left(\int\limits_{Q/h} dy|1-c_0(h)-h^m\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta y}}{|2\pi\beta|^m}|^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \left(\int\limits_Q dx|1-c_0(h)-\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m b_m(x)|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Итак,

$$\|l_h^0|(\widetilde{W}_p^m(Q))^*\| = \left(\int\limits_Q dx|1-c_0(h)-\frac{h}{2\pi}^m b_m(x)|^{p'}\right)^{1/p'} + o(h^m).$$

После замены $1-c_0(h) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m R_0(h) + o(h^m)$ получаем

$$\|l_h^0|(\widetilde{W}_p^m(Q))^*\| = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m\left(\int\limits_Q dx|R_0(h)-b_m(x)|^{p'}\right)^{1/p'} + o(h^m).$$

Очевидно, минимизация $(\widetilde{W}_p^m)^*$ — нормы l_h^0 по c_0 эквивалентна минимизации по R_0 интеграла $\int\limits_Q dx|R_0-b_m(x)|^{p'}$. Из независимости $b_m(x)$ от h следует независимость от h и R_0, $R_0 = \arg\min\limits_R \int\limits_Q dx|R-b_m(x)|^{p'}$. С этим постоянным по h числом R_0

$$\|l_h^0|(\widetilde{W}_p^m(Q))^*\| = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \|R_0-b_m(x)|L_{p'}\|\cdot(1+o(h^m)),$$

а

$$l_h^0(x) = \chi_Q(x) - \left[1-\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m R_0 + o(h^m)\right] h^n\sum_{hk\in Q}\delta(x-hk).$$

Замечание 1. Очевидно, что необходимое и достаточное условие асимптотической оптимальности l_h^1 есть $R_0 = 0$.

Этот результат в одномерном случае получен В.И. Половинкиным для целых m (тогда не обязательна четность m). Оптимальные R_0 были названы сопутствующими числами квадратурной формулы.

Замечание 2. Наш результат поправляет относящиеся к этому случаю некоторые вычисления Ц.Б. Шойнжурова.

Поступила в редакцию 10 октября 2006 г.