СХЕМА ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ СУММ*

Н. Н. Осипов
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: nnosipov@rambler.ru

An evaluation method for a certain type of the theoretic-number sums is proposed. These sums appear while estimating a norm of error functional for lattice cubature formulas.

Введение

В теории кубатурных формул одной из основных является задача об оценке нормы функционала погрешности кубатурной формулы относительно некоторого банахова пространства, которому принадлежат подынтегральные функции. Как правило, простого выражения для этой нормы не существует, и она часто записывается в виде бесконечного ряда, члены которого нумеруются точками некоторой n-мерной решетки M и зависят от малого параметра h (шага решетки узлов кубатурной формулы). Такая ситуация возникает, например, в задаче об оценке нормы функционала погрешности простейших решетчатых кубатурных формул на пространствах функций с доминирующей производной. Эта задача в одном из вариантов своей постановки может быть сведена к исследованию асимптотики при $h \to 0$ сумм вида

$$\sum_{0 \neq x \in M} \frac{1}{(1+|h^{-1}x_1|^2)^s \dots (1+|h^{-1}x_n|^2)^s}, \quad x=(x_1,\dots,x_n), \quad s>1/2 \qquad (*)$$

(см., например, [1, 2], а также в более подробном изложении [3]). По этой причине изучение асимптотики сумм $(*)$ и их возможных обобщений или модификаций представляется актуальным.

Цель настоящей работы — дать простую и удобную для практической реализации схему оценки подобных сумм в случае, когда в качестве M рассматриваются так называемые алгебраические решетки, конструкция которых связана с некоторым полем алгебраических чисел $\mathfrak{K}$ степени $n \geqslant 2$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

1. Предварительные сведения

В двумерном случае конструкцию алгебраических решеток можно описать в элементарных терминах. Приведем пример такой решетки, построенной на основе вещественного

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00823).

квадратичного поля $\mathfrak{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Пусть M_ϕ — решетка в плоскости $\mathbb{R}^2$, получающаяся из решетки $\mathbb{Z}^2$ точек плоскости с целочисленными координатами поворотом на угол ϕ, для которого число

$$\theta = \operatorname{tg}\phi$$

является квадратичной иррациональностью из $\mathfrak{K}$, например

$$\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Базис решетки M_ϕ образуют векторы

$$b_1 = (\cos\phi, \sin\phi), \quad b_2 = (-\sin\phi, \cos\phi).$$

Для произвольной точки $(x, y) = mb_1 + nb_2$ $(m,\ n \in \mathbb{Z})$ решетки M_ϕ имеем

$$x = \mu\cos\phi, \quad y = \mu'\sin\phi, \tag{1}$$

где $\mu = m - n\theta$, $\mu' = m - n\theta'$ (здесь штрих означает переход к сопряженной квадратичной иррациональности). Числа

$$\mu = m - n\theta, \quad m,\ n \in \mathbb{Z},$$

образуют кольцо целых чисел $\mathfrak{D}$ поля $\mathfrak{K}$ (т. е. представляют собой все целые алгебраические числа, содержащиеся в этом поле). Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между точками M_ϕ и числами из $\mathfrak{D}$. Так как

$$|xy| = |\mu\mu'|\cos\phi\sin\phi = |m^2 + mn - n^2|\cos\phi\sin\phi = c\cos\phi\sin\phi = c\cdot 5^{-1/2},$$

где c — целое неотрицательное число, вся решетка M_ϕ (за исключением точки $(0, 0)$) располагается в гиперболических слоях

$$|xy| = c\cdot 5^{-1/2}, \quad c = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2}$$

Все точки (x, y) решетки M_ϕ, находящиеся в слое (2), в терминах представления (1) описываются уравнением

$$|N_{\mathfrak{K}}(\mu)| = c,$$

где $\mu \in \mathfrak{D}$ и $N_{\mathfrak{K}}(\xi) = \xi\xi'$ — так называемая норма числа $\xi \in \mathfrak{K}$. Множество решений этого уравнения есть объединение нескольких геометрических прогрессий вида

$$\mu = \pm\varepsilon^k\mu_*, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(так называемая основная единица кольца $\mathfrak{D}$), а числа $\mu_* \in \mathfrak{D}$ удовлетворяют условиям

$$|N_{\mathfrak{K}}(\mu_*)| = c, \quad 1 \leqslant \mu_* < \varepsilon.$$

Легко видеть, что таких чисел μ_*, а значит, и прогрессий вида (3) существует лишь конечное (быть может, равное нулю) число, которое мы обозначим $Q(c)$:

$$\mu_* = \mu_j = \mu_j(c), \quad j = 1,\ \ldots,\ Q(c).$$

Значения $Q(c) \neq 0$ и $\mu_j(c)$ для $1 \leqslant c \leqslant 20$

c	$Q(c)$	$\mu_j = \mu_j(c)$
1	1	$\mu_1 = 1$
4	1	$\mu_1 = 2\theta$
5	1	$\mu_1 = 2 - \theta$
9	1	$\mu_1 = 3 - 3\theta$
11	2	$\mu_1 = -2 + 5\theta$, $\mu_2 = -1 + 4\theta$
16	1	$\mu_1 = 4 - 4\theta$
19	2	$\mu_1 = -2 + 7\theta$, $\mu_2 = 5 - 6\theta$
20	1	$\mu_1 = 6 - 8\theta$

Некоторые примеры даны в таблице.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения теоретико-числовые факты (доказательство можно найти, например, в [4]). Ряд

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{Q(c)}{c^s}$$

сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, где его сумма есть аналитическая функция параметра s, совпадающая с так называемой дзета-функцией Дедекинда $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ поля $\mathfrak{K}$. В частности, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$-\zeta'_{\mathfrak{K}}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{Q(c) \ln c}{c^s}.$$

Приближенные значения функций $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ и $\lambda_{\mathfrak{K}}(s) = -\zeta'_{\mathfrak{K}}(s)/\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ можно найти, используя специализированную систему компьютерной алгебры PARI/GP [5].

Решетки типа M_ϕ могут быть построены в произвольном n-мерном случае. Подробное описание излагаемой ниже конструкции, а также доказательство содержащихся в ней утверждений см., например, в [4, гл. 2].

Пусть $\mathfrak{K}$ — поле алгебраических чисел степени $n \geqslant 2$, которое для простоты мы предположим вполне вещественным (т. е. $\mathfrak{K}$ и все сопряженные с ним поля вещественны), и $\mathfrak{D}$ — его кольцо целых чисел. Обозначим через σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ изоморфные вложения поля $\mathfrak{K}$ в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Нормой $N_{\mathfrak{K}}(\xi)$ числа $\xi \in \mathfrak{K}$ называют произведение всех чисел, сопряженных с ξ, т. е.

$$N_{\mathfrak{K}}(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\xi).$$

Имеем $N_{\mathfrak{K}}(\xi) \in \mathbb{Q}$; если $\mu \in \mathfrak{D}$, то $N_{\mathfrak{K}}(\mu) \in \mathbb{Z}$. Число $\xi \in \mathfrak{K}$ можно изобразить в пространстве $\mathbb{R}^n$ точкой $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где

$$x_i = \sigma_i(\xi), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Числа $\mu \in \mathfrak{D}$ при этом изображаются точками некоторой n-мерной решетки M, лежащей (за исключением точки $(0, \ldots, 0)$) в слоях

$$|x_1 \ldots x_n| = c, \quad c = 1, 2, 3, \ldots$$

Каждый такой слой точек решетки M описывается соответствующим норменным уравнением

$$|N_{\mathfrak{K}}(\mu)| = c,$$

где $\mu \in \mathfrak{D}$. Известно, что все его решения допускают однозначное представление в виде

$$\mu = \pm\varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_u^{k_u} \mu_j, \quad k = (k_1, \dots, k_u) \in \mathbb{Z}^u,$$

где $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_u\}$ — некоторая фиксированная система основных единиц кольца $\mathfrak{D}$, число которых

$$u = n - 1,$$

а $\mu_j = \mu_j(c) \in \mathfrak{D}$ — некоторые фиксированные решения, $j = 1, \dots, Q(c)$. Это утверждение легко вытекает из классической теоремы Дирихле о структуре группы единиц (т. е. обратимых элементов) кольца целых чисел произвольного поля алгебраических чисел.

2. Схема оценки в двумерном случае

Для иллюстрации схемы рассмотрим один, в целом типичный, пример. Пусть нас интересует асимптотика суммы

$$S(h, M_\phi, s_1, s_2) = \sum_{(0,0)\neq(x,y)\in M_\phi} \frac{1}{(1+|h^{-1}x|^{s_1})(1+|h^{-1}y|^{s_2})}$$

при $h \to 0$. Покажем, что при $s_2 > s_1 > 1$ справедлива оценка

$$S(h, M_\phi, s_1, s_2) \asymp h^{2s_1},$$

а если $s_2 = s_1 > 1$, то

$$S(h, M_\phi, s_1, s_2) = C^* h^{2s_1}(\ln h^{-1} + O(1)),$$

где

$$C^* = 4\, \frac{5^{s_1/2}}{\ln\varepsilon}\, \zeta_{\mathfrak{K}}(s_1). \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения разбивается на несколько этапов.

Этап 1 (подготовительный). Имеем

$$S(h, M_\phi, s_1, s_2) = \sum_{0\neq\mu\in\mathfrak{D}} \frac{1}{(1+|h^{-1}\mu\cos\phi|^{s_1})(1+|h^{-1}\mu'\sin\phi|^{s_2})} = 2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{Q(c)}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k),$$

где

$$F(t) = \frac{1}{(1+z^{s_1})(1+(\omega/z)^{s_2})}, \quad z = (h^{-1}|\mu_j|\cos\phi)\,\varepsilon^t, \quad \omega = h^{-2}c\cdot 5^{-1/2}.$$

Положим

$$\Sigma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k), \quad I = \int_{\mathbb{R}} F(t)\,dt,$$

и пусть $\delta = \Sigma - I$.

Этап 2 (оценка интеграла). Оценим I, сделав замену переменой $t \to z$:

$$I = \frac{1}{\ln\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+z^{s_1})(1+(\omega/z)^{s_2})}\frac{dz}{z} = \frac{1}{\ln\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{z^{s_2-1}}{(1+z^{s_1})(z^{s_2}+\omega^{s_2})}\,dz.$$

Если $s_2 > s_1 > 1$, то

$$I \leqslant \frac{1}{\ln\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{z^{s_2-s_1-1}}{z^{s_2}+\omega^{s_2}}\,dz = C_1\omega^{-s_1}, \quad C_1 = \frac{1}{\ln\varepsilon}\frac{\pi}{s_2\sin(\pi s_1/s_2)}.$$

Если же $s_2 = s_1 > 1$, то

$$I = \frac{1}{\ln\varepsilon}\frac{\ln\omega}{\omega^{s_1}-1} = \frac{1}{\ln\varepsilon}\,\omega^{-s_1}(\ln\omega + C_2), \quad 0 < C_2 < 1.$$

Этап 3 (оценка погрешности). Оценим δ, используя неравенство

$$|\delta| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |F'(t)|\,dt. \tag{5}$$

Имеем

$$F'(t) = -\ln\varepsilon\left(\frac{s_1 z^{s_1}}{1+z^{s_1}} - \frac{s_2(\omega/z)^{s_2}}{1+(\omega/z)^{s_2}}\right)F(t),$$

откуда

$$|F'(t)| \leqslant C_3 F(t), \quad C_3 = (s_1+s_2)\ln\varepsilon.$$

Поэтому при $s_2 > s_1 > 1$ получим

$$|\delta| \leqslant C_3 I \leqslant C_1C_3\omega^{-s_1}.$$

Если $s_2 = s_1 > 1$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F'(t)|\,dt =$$

$$= s_1\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{|z^{s_1}-(\omega/z)^{s_1}|}{[(1+z^{s_1})(1+(\omega/z)^{s_1})]^2}\frac{dz}{z} \leqslant 2s_1\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{(\omega/z)^{s_1}}{[(1+z^{s_1})(1+(\omega/z)^{s_1})]^2}\frac{dz}{z} \leqslant$$

$$\leqslant 2s_1\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{(\omega/z)^{-s_1}}{(1+z^{s_1})^2}\frac{dz}{z} = 2\omega^{-s_1}.$$

Следовательно,

$$|\delta| \leqslant 2\omega^{-s_1}.$$

Этап 4 (заключительный). Имеем

$$\omega^{-s_1} = c^{-s_1}h^{2s_1}\cdot 5^{s_1/2}, \quad \ln\omega = 2\ln h^{-1} + \ln c - \frac{\ln 5}{2}.$$

При $s_2 > s_1 > 1$ получаем

$$S(h, M_\phi, s_1, s_2) = 2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{Q(c)}(I+\delta) \leqslant$$

$$\leqslant 2(C_1 + C_1C_3)\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{Q(c)}\omega^{-s_1} = C_4h^{2s_1}, \quad C_4 = 2C_1(1+C_3)5^{s_1/2}\zeta_{\mathfrak{K}}(s_1).$$

При $k = [t]$, где t определяется из равенства $z = \omega$, соответствующее слагаемое суммы Σ будет $\asymp \omega^{-s_1}$, поэтому полученная оценка является точной по порядку. Если $s_2 = s_1 > 1$, то имеем

$$S(h, M_\phi, s_1, s_2) = 2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{Q(c)}(I + \delta) = C^* h^{2s_1}(\ln h^{-1} + C_5),$$

где константа C^* определена в (4), а для C_5 справедливо представление

$$C_5 = \frac{\lambda_{\mathfrak{K}}(s_1)}{2} + \Delta, \quad \frac{-4\ln\varepsilon - \ln 5}{4} < \Delta < \frac{2 + 4\ln\varepsilon - \ln 5}{4}.$$

Замечание. Для изучения асимптотики сумм типа $S(h, M_\phi, s_1, s_2)$ можно привлекать и другие методы, например методы теории диофантовых приближений, использующие аппарат цепных дробей [3, § 3 гл. 3].

3. Пример оценки в n-мерном случае

Предложенная выше схема оценки сумм по алгебраическим решеткам применима и в n-мерном случае, однако, как станет видно из приводимого далее примера, ее реализация технически сложнее.

Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — положительные числа и s — их среднее гармоническое:

$$s = \frac{n}{s_1^{-1} + \ldots + s_n^{-1}}.$$

Положим

$$S(h, M, s_1, \ldots, s_n) = \sum_{0 \neq x \in M} \frac{1}{1 + |h^{-1}x_1|^{ns_1} + \ldots + |h^{-1}x_n|^{ns_n}}, \tag{6}$$

где M — некоторая решетка в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно показать, например, что для $M = \mathbb{Z}^n$ и $s > 1$ этот ряд сходится, причем

$$S(h, \mathbb{Z}^n, s_1, \ldots, s_n) \asymp h^{ns_*}$$

при $h \to 0$, где $s_* = \min\{s_1, \ldots, s_n\}$. Следующая теорема обобщает результат работы [6] на n-мерный случай.

Теорема. *Пусть $s > 1$ и M — решетка, изображающая в $\mathbb{R}^n$ кольцо целых чисел $\mathfrak{D}$ вполне вещественного поля алгебраических чисел $\mathfrak{K}$ степени n. Тогда*

$$S(h, M, s_1, \ldots, s_n) \asymp h^{ns}$$

при $h \to 0$.

Таким образом, поскольку $s > s_*$ (за исключением случая $s_1 = \ldots = s_n$), для алгебраических решеток M сумма (6) убывает к нулю быстрее, чем для стандартной решетки $M = \mathbb{Z}^n$.

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^u} \frac{1}{w_1 + \ldots + w_u + \prod_{l=1}^{u} w_l^{-\alpha_l}} \frac{dw_1 \ldots dw_u}{\prod_{l=1}^{u} w_l}$$

сходится при любых положительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_u$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для некоторых $\eta > 0$ и $C > 0$ в каждой из областей вида $\{(w_1, \ldots, w_u) \in \mathbb{R}_+^u : w_1 \gtrless 1, \ldots, w_u \gtrless 1\}$ выполнено неравенство

$$w_1 + \ldots + w_u + \prod_{l=1}^{u} w_l^{-\alpha_l} \geqslant C w_1^{\pm\eta} \ldots w_u^{\pm\eta}$$

(неравенству $w_l \geqslant 1$ соответствует множитель $w_l^{+\eta}$ в произведении справа, а неравенству $w_l \leqslant 1$ — множитель $w_l^{-\eta}$). Пусть, например,

$$w_1 \geqslant 1, \ \ldots, \ w_l \geqslant 1, \ 0 < w_{l+1} \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 < w_u \leqslant 1.$$

Тогда

$$w_1 + \ldots + w_u + \prod_{l=1}^{u} w_l^{-\alpha_l} \geqslant w_1 + \ldots + w_l + (w_1 \ldots w_l)^{-\alpha}(w_{l+1} \ldots w_u)^{-\beta} \geqslant$$
$$\geqslant (w_1 \ldots w_l)^{\gamma} + (w_1 \ldots w_l)^{-\alpha}(w_{l+1} \ldots w_u)^{-\beta} = x^{\gamma} + x^{-\alpha} y^{-\beta},$$

где $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, $\beta = \min\{\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_u\}$, $\gamma = 1/l$,

$$x = w_1 \ldots w_l \geqslant 1, \quad 0 < y = w_{l+1} \ldots w_u \leqslant 1.$$

Осталось убедиться, что

$$x^{\gamma} + x^{-\alpha} y^{-\beta} \geqslant C x^{\eta} y^{-\eta}$$

в области $x \geqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = y^{\eta} x^{\gamma-\eta} + y^{-\beta+\eta} x^{-\alpha-\eta}.$$

Имеем $f(x) \geqslant f(x_0)$, где

$$x_0 = \left(\frac{\alpha+\eta}{\gamma-\eta}\right)^{1/(\alpha+\gamma)} y^{-\beta/(\alpha+\gamma)}.$$

Так как

$$f(x_0) \asymp y^{\delta}, \quad \delta = -\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma} + \eta\left(1 + \frac{\beta}{\alpha+\gamma}\right),$$

то $f(x_0) \geqslant C$ при $0 < y \leqslant 1$, если η достаточно мало. □

Доказательство теоремы. Имеем

$$S(h, M, s_1, \ldots, s_n) =$$
$$= \sum_{0 \neq \mu \in \mathfrak{D}} \frac{1}{1 + |h^{-1}\sigma_1(\mu)|^{ns_1} + \ldots + |h^{-1}\sigma_n(\mu)|^{ns_n}} = 2 \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{Q(c)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^u} F(k_1, \ldots, k_u).$$

Здесь

$$F(y_1, \ldots, y_u) = \frac{1}{1 + z_1^{ns_1} + \ldots + z_n^{ns_n}}, \quad z_i = h^{-1}|\sigma_i(\mu_j)| \prod_{l=1}^{u} |\sigma_i(\varepsilon_l)|^{y_l}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Введем обозначение
$$\omega = \prod_{i=1}^{n} z_i = h^{-n} c.$$
Тогда, в частности,
$$z_n = \omega \prod_{l=1}^{u} z_l^{-1}$$
(напомним, что $u = n - 1$). Положим
$$\Sigma = \sum_{k \in \mathbb{Z}^u} F(k_1, \ldots, k_u), \quad I = \int\limits_{\mathbb{R}^u} F(y_1, \ldots, y_u)\, dy_1 \ldots dy_u,$$
и пусть, как и выше, $\delta = \Sigma - I$.

А. Оценим интеграл I. Так как
$$\frac{\partial z_l}{\partial y_m} = \rho_{ml} z_l, \quad \rho_{ml} = \ln |\sigma_l(\varepsilon_m)|,$$
для якобиана J замены переменных $(y_1, \ldots, y_u) \to (z_1, \ldots, z_u)$ имеем
$$J = R \prod_{l=1}^{u} z_l, \quad R = |\det(\rho_{ml})|.$$
Следовательно,
$$I = R^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_+^u} \frac{1}{1 + z_1^{ns_1} + \ldots + z_u^{ns_u} + \left(\omega \prod_{l=1}^{u} z_l^{-1}\right)^{ns_n}} \frac{dz_1 \ldots dz_u}{\prod_{l=1}^{u} z_l} \leqslant R^{-1} \widetilde{I},$$
где
$$\widetilde{I} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^u} \frac{1}{z_1^{ns_1} + \ldots + z_u^{ns_u} + \left(\omega \prod_{l=1}^{u} z_l^{-1}\right)^{ns_n}} \frac{dz_1 \ldots dz_u}{\prod_{l=1}^{u} z_l}.$$
После замены переменных $(z_1, \ldots, z_u) \to (w_1, \ldots, w_u)$, где
$$w_l = \omega^{-s} z_l^{ns_l}, \quad 1 \leqslant l \leqslant u,$$
получим
$$\widetilde{I} = \omega^{-s} \frac{1}{n^u \prod_{l=1}^{u} s_l} \int\limits_{\mathbb{R}_+^u} \frac{1}{w_1 + \ldots + w_u + \prod_{l=1}^{u} w_l^{-s_n/s_l}} \frac{dw_1 \ldots dw_u}{\prod_{l=1}^{u} w_l}.$$
По лемме последний интеграл сходится и, таким образом, справедлива оценка
$$I \leqslant C_1 \omega^{-s}.$$

Б. Опираясь на многомерный аналог неравенства (5) (см., например, [2]), можно показать, что $\delta \leqslant C_2 I$. Следовательно,
$$\Sigma = I + \delta \leqslant C_3 \omega^{-s}.$$

B. Так как $\omega^{-s} = h^{ns}c^{-s}$, то

$$S(h, M, s_1, \ldots, s_n) \leqslant C_3 \sum_{c=1}^{\infty} Q(c) c^{-s} h^{ns} = C_4 h^{ns}.$$

Осталось показать, что полученная оценка является точной по порядку. Это так, поскольку сумма Σ содержит слагаемое $\asymp \omega^{-s}$. Действительно, пусть $y_1, \ldots, y_u$ таковы, что

$$z_l^{ns_l} = \omega^s, \quad 1 \leqslant l \leqslant u.$$

Тогда $F(y_1, \ldots, y_u) \asymp \omega^{-s}$ и можно взять $k_1 = [y_1], \ldots, k_u = [y_u]$. $\square$

В заключение приведем еще один пример такого рода оценки (распространение примера из разд. 2 на n-мерный случай):

$$\sum_{0 \neq x \in M} \frac{1}{(1 + |h^{-1}x_1|^{s_1}) \ldots (1 + |h^{-1}x_n|^{s_n})} \asymp h^{ns_*} (\ln h^{-1})^{v-1}, \quad h \to 0,$$

где $s_* = \min\{s_1, \ldots, s_n\} > 1$, а v — число номеров i, для которых $s_i = s_*$. При $v = n$ указанная оценка допускает уточнение (см. аналогичный результат в [2], сформулированный для суммы $(*)$). За недостатком места доказательство этих утверждений мы опускаем.

Список литературы

[1] Рамазанов М.Д. О порядке сходимости решетчатых кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 3. С. 551–553.

[2] Осипов Н.Н. Асимптотика нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул на пространствах $\widetilde{W}_2^{(s,p,q)}(\Lambda)$ // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9. Спецвыпуск. С. 95–101.

[3] Осипов Н.Н. Кубатурные формулы для периодических функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 2004.

[4] Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

[5] `http://www.parigp-home.de`

[6] Рамазанов М.Д., Рахматуллин Д.Я. Достижение наилучшего порядка приближения интегралов функций из $W_2^m(\mathbb{R}^2)$ на решетчатых кубатурных формулах за счет поворота решетки узлов // Кубатурные формулы и их приложения: Матер. VIII Междунар. семинара-совещания. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2005. С. 109–116.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.