# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ*

А. В. Пененко
*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
e-mail: aleks@ommgp.sscc.ru

A method for sequential variational data assimilation is considered. The Kalman filter is proved to be a special case of the algorithm. The economical algorithm for the state estimation of the 2D distributed system when the state function is measured at particular points is constructed.

## Введение

По мере развития математического моделирования возникла необходимость в том, чтобы кроме широко используемого сейчас аппарата прямого моделирования строить алгоритмы, которые могут учитывать данные, собираемые о моделируемых процессах. Особенно важны алгоритмы, способные оценивать состояние системы в реальном времени [1]. Известные методы типа фильтрации Калмана успешно применяются в случае систем малой размерности, однако при работе с системами большой размерности возникают вычислительные трудности. В связи с этим возник вопрос, можно ли за счет отказа от некоторых свойств оценок, получаемых этими методами, построить быстрые методы, эффективно работающие с системами высокой размерности. Исследованию этого вопроса и посвящена данная статья.

## 1. Постановка задачи

Построим абстрактную модель системы с усвоением данных. Предположим, что временной интервал дискретизирован с равномерным шагом $\tau$. “Реальное” состояние системы в момент времени $t_k$ задается вектором $\hat{\varphi}^k \in \mathbb{R}^n$. Пусть имеется некоторая текущая оценка

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-05-64562), Программы Президиума РАН (№ 16), Программы Отделения математических наук РАН (№ 3), Европейской комиссии (контракт № 013427).

состояния $\varphi^k \in \mathbb{R}^n$. Также имеется некоторая гипотетическая модель системы с параметрами $\Lambda^{k+1}$ (вещественной невырожденной матрицей $n \times n$), $f^{k+1} \in \mathbb{R}^n$, которая позволяет спрогнозировать на основе текущего состояния модели ее следующее состояние $\tilde{\varphi}^{k+1}$ по алгоритму

$$\Lambda^{k+1}\tilde{\varphi}^{k+1} = \varphi^k + \tau f^{k+1}. \tag{1}$$

Пусть также есть данные некоторых измерений $\psi^{k+1} \in \mathbb{R}^m$. Если $\hat{\varphi}^{k+1}$ — реальное состояние системы, то пусть связь между ними задается как

$$H^{k+1}\hat{\varphi}^{k+1} = \psi^{k+1} + \eta^{k+1},$$

где $\eta^{k+1}$ — неизвестные ошибки измерений и модели наблюдений, а $H^{k+1}$ — матрица $m \times n$ $(m \leq n)$. Введем функции, называемые соответственно невязкой модели процессов и невязкой модели измерений:

$$r^{k+1}(\varphi) = \Lambda^{k+1}\varphi - \varphi^k - \tau f^{k+1}, \quad \eta^{k+1}(\varphi) = H^{k+1}\varphi - \psi^{k+1}.$$

Считается, что оценка состояния системы $\varphi^{k+1}$ представляет собой некоторый компромисс между результатом расчета по модели процесса и данными измерений. Формально определим решение такой задачи $\varphi^{k+1}$ как минимум следующего целевого функционала:

$$J(\varphi; W_1, W_2) = \left\langle W_1 r^{k+1}(\varphi), r^{k+1}(\varphi)\right\rangle + \left\langle W_2 \eta^{k+1}(\varphi), \eta^{k+1}(\varphi)\right\rangle, \tag{2}$$

где $W_1 = W_1^* > 0, W_2 = W_2^* \geq 0$ — весовые матрицы $n \times n$ и $m \times m$ соответственно. Далее везде $(.)^*$ означает транспонирование, а $< ., . >$ — скалярное произведение.

## 2. Решение задачи последовательного вариационного усвоения данных

**Лемма 1.** *Пусть* $W_1 = W_1^* \geq 0$, $W_2 = W_2^* \geq 0$, *тогда минимум целевого функционала (2) задается решением уравнения Эйлера:*

$$\begin{aligned} &\left[\left[\Lambda^{k+1}\right]^* W_1 \Lambda^{k+1} + \left[H^{k+1}\right]^* W_2 H^{k+1}\right]\varphi = \\ &= \left[\Lambda^{k+1}\right]^* W_1 \left[\varphi^k + \tau f^{k+1}\right] + \left[H^{k+1}\right]^* W_2 \left[\psi^{k+1}\right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим важный частный случай, когда решается задача усвоения данных при точечных измерениях значений функции состояния.

**Лемма 2.** *Пусть* $W_1 = I$, $H^{k+1} = I$,

$$W_2 = \gamma\,\mathrm{diag}(M^{k+1}), M^{k+1} \in \mathbb{R}^n, M_i^{k+1} = \{0 \vee 1\},$$

*а* $\Lambda^{k+1}$ *является трехдиагональной матрицей с элементами*

$$\begin{aligned} \left[\Lambda^{k+1}\right]_{ii} &= B_i, i = 1, ..., n; \\ \left[\Lambda^{k+1}\right]_{ii+1} &= -A_i, i = 1, ..., n-1; \\ \left[\Lambda^{k+1}\right]_{ii-1} &= -C_i, i = 2, ..., n; \end{aligned}$$

*тогда минимум функционала (2) дается решением системы матричных уравнений:*

$$\begin{bmatrix} B_1 & -1 \\ \gamma M_1^{k+1} & B_1 \end{bmatrix} U_1^{k+1} - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} U_2^{k+1} = \begin{bmatrix} \varphi_1^k + \tau f_1^{k+1} \\ \gamma\psi_1 M_1^{k+1} \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$-\begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & A_{i-1} \end{bmatrix} U_{i-1}^{k+1} + \begin{bmatrix} B_i & -1 \\ \gamma M_i^{k+1} & B_i \end{bmatrix} U_i^{k+1} - \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_{i+1} \end{bmatrix} U_{i+1}^{k+1} = \begin{bmatrix} \varphi_i^k + \tau f_i^{k+1} \\ \gamma\psi_i M_i^{k+1} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$i = 2...n-1;$$

$$-\begin{bmatrix} C_n & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix} U_{n-1}^{k+1} + \begin{bmatrix} B_n & -1 \\ \gamma M_n^{k+1} & B_n \end{bmatrix} U_n^{k+1} = \begin{bmatrix} \varphi_n^k + \tau f_n^{k+1} \\ \gamma\psi_n M_n^{k+1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

*где* $U_i^{k+1} = \begin{bmatrix} \varphi_i^{k+1} \\ \varphi_i^{*k+1} \end{bmatrix}$.

В этом случае сопряженная функция $\varphi_i^{*k+1}$ является вспомогательной и может служить для исследования качества гипотетической модели. Система матричных уравнений (3)–(5), в свою очередь, может быть решена матричной прогонкой.

# 3. Метод фильтрации Калмана как частный случай последовательного вариационного усвоения данных

Для решения данного класса задач широко используется метод фильтрации Калмана [2]. Предполагается, что состояние системы $\hat{\varphi}^{k+1}$ описывается таким случайным вектором, что невязки модели процессов и модели измерений являются нормально распределенными случайными величинами с нулевыми средними и матрицами ковариации $Q^{k+1}$ и $R^{k+1}$ соответственно:

$$r(\hat{\varphi}^{k+1}) \sim N(0, Q^{k+1}), \eta(\hat{\varphi}^{k+1}) \sim N(0, R^{k+1}).$$

В этом случае ставится задача минимизации функционала

$$J_{\text{kalman}}(\varphi^{k+1}) = E\left|\varphi^{k+1} - \hat{\varphi}^{k+1}\right|^2,$$

где $E[.]$ обозначает операцию математического ожидания. Минимум этому функционалу доставляет оценка

$$\varphi^{k+1} = \tilde{\varphi}^{k+1} + K^{k+1}\left[\psi^{k+1} - H^{k+1}\tilde{\varphi}^{k+1}\right], \tag{6}$$

где

$$K^{k+1} = P^{k+1}\left[H^{k+1}\right]^* \left[H^{k+1}P^{k+1}\left[H^{k+1}\right]^* + R^{k+1}\right]^{-1}; \tag{7}$$

$$P^{k+1} = \left(\left[\Lambda^{k+1}\right]^{-1}\right)\left[\hat{P}^k + Q^{k+1}\right]\left(\left[\Lambda^{k+1}\right]^{-1}\right)^*; \tag{8}$$

$$\hat{P}^k = \operatorname{cov}(\varphi^k - \hat{\varphi}^k). \tag{9}$$

Матрицу ковариации ошибки прогноза $\hat{P}^{k+1}$ можно вычислить как

$$\hat{P}^{k+1} = \operatorname{cov}\left(\varphi^{k+1} - \hat{\varphi}^{k+1}\right) =$$
$$= (I - K^{k+1}H^{k+1})P^{k+1}(I - K^{k+1}H^{k+1})^* + K^{k+1}R^{k+1}\left[K^{k+1}\right]^*. \tag{10}$$

**Лемма 3.** *Оценка, получаемая по методу Калмана (6)–(10), и оценка, получаемая как минимум функционала вида (2)*

$$J\left[\varphi; \left(\Lambda^{k+1} P^{k+1} \left[\Lambda^{k+1}\right]^*\right)^{-1}, \left[R^{k+1}\right]^{-1}\right],$$

*совпадают.*

В алгоритмах типа фильтрации Калмана требуется вычисление матриц ковариации ошибки прогноза $\hat{P}^{k+1}$. Хотя это и позволяет оценить качество прогноза, но для ее нахождения требуется обращать полные матрицы, что в случае моделей высокой размерности не всегда возможно, особенно в реальном времени.

# 4. Расщепленная задача усвоения данных

Пусть модель системы, описываемая уравнением (1), может быть приближена расщепленной системой [3]:

$$\Lambda_1^{k+1}\check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}} = \varphi^k + \tau f^{k+1};$$
$$\Lambda_2^{k+1}\check{\varphi}^{k+1} = \check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}}.$$

В этом случае определим решение расщепленной задачи усвоения как последовательное решение задач минимизации следующих функционалов:

$$J(\check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}}; W_1, W_2) = \left\langle W_1\left[\Lambda_1^{k+1}\check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}} - \varphi^k - \tau f^{k+1}\right], \left[\Lambda_1^{k+1}\check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}} - \varphi^k - \tau f^{k+1}\right]\right\rangle + \\ + \left\langle W_2\eta^{k+1}(\check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}}), \eta^{k+1}(\check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}})\right\rangle; \qquad (11)$$

$$J(\varphi^{k+1}; W_1, W_2) = \left\langle W_1\left[\Lambda_2^{k+1}\varphi^{k+1} - \check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}}\right], \left[\Lambda_2^{k+1}\varphi^{k+1} - \check{\varphi}^{k+\frac{1}{2}}\right]\right\rangle + \\ + \left\langle W_2\eta^{k+1}(\varphi^{k+1}), \eta^{k+1}(\varphi^{k+1})\right\rangle. \qquad (12)$$

Аналогично можно определить расщепленную задачу усвоения данных и для других схем расщепления.

# 5. Тестовый пример

Для того чтобы проиллюстрировать работу алгоритмов, рассмотрим следующий пример. Оценивается состояние системы $\hat{\varphi}$, описываемой дискретным аналогом краевой задачи:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,y,t) + u(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,t) + v(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,t) - \mu\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi(x,y,t)) = f(x,y,t); \qquad (13)$$

$$(x,y,t) \in \Omega = [0, Lx] \times [0, Ly] \times [0, T]; \qquad (14)$$

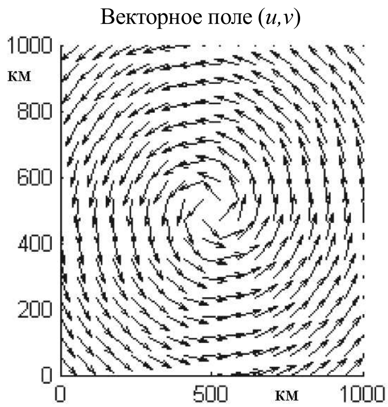
$$\varphi(\partial\Omega, t) = 0, \varphi(\Omega, 0) = 0, \qquad (15)$$

где $f(x,y,t)$ задается как точечный источник, расположенный в точке $(Lx/4, Ly/4)$ мощности $fp$ и действующий на промежутке времени $[0, T/60]$. Задача (13)–(15) аппроксимировалась на равномерной сетке с помощью схемы направленных разностей. Расщепление проводилось покоординатно.

Далее предполагалось, что $f(x,y,t)$ неизвестна и оценку требуется построить на основе данных измерения функции состояния системы $\psi^t = \hat{\varphi}\left(x(t), y(t), t\right)$ в точке, координаты которой изменяются во времени по закону

$$x(t) = Lx/4, \quad y(t) = Ly - S_y t, \ t < t_1, \quad y(t) = S_y(t - t_1), \ t_1 < t < t_2,$$

где $S_y$ — скорость движения измерительной системы. В качестве гипотетической модели процесса $\bar{\varphi}$ в алгоритме усвоения данных использовался дискретный расщепленный аналог краевой задачи (13)–(15) с $f(x,y,t) = 0$.




Параметры модели:
$Lx = 1000$ км, $Ly = 1000$ км
$T = 20$ ч
число точек по $x$ 50
число точек по $y$ 50
число точек по времени 300
$\mu = 100$
модуль вектора $(u,v) = 10$ м/с
$\gamma = 100$
$fp = 3$
$S_y = 300$ км/ч
$t_1 = 3.33$ ч, $t_2 = 6.66$ ч

Рис. 1. Параметры численного эксперимента.

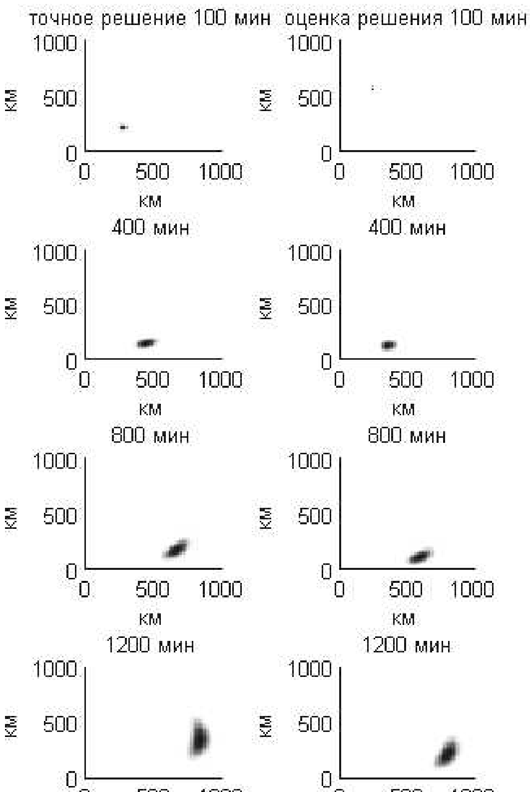



Рис. 2. Заданное точное решение (слева) и его оценка последовательной системой усвоения данных (справа).

Для рассмотренной системы ставилась расщепленная задача усвоения. Веса в соответствующих функционалах (11), (12) выбирались как $W_1 = I, W_2 = \gamma I$. Числовые значения параметров эксперимента представлены на рис. 1. На рис. 2 представлены результаты расчетов. Отметим, что алгоритму усвоения удалось качественно воспроизвести по одному измерению на каждом шаге по времени, характер поведения наблюдаемой системы с помощью экономичной схемы вычислений с числом операций $O(nx * ny)$ на один шаг. При этом, однако, абсолютные величины точного решения и его оценки различаются. Успех алгоритма усвоения данных в этом примере объясняется тем, что наблюдательный комплекс в начале временного интервала пересек след от источника.

## Заключение

Рассмотрен метод, позволяющий получать оценки состояния системы большой размерности, представляющие компромисс между гипотетической моделью процесса и данными измерений в смысле минимума функционала (2). Показано, что при специальном выборе весов в функционале (2) оценка, получаемая методом последовательного вариационного усвоения, совпадает с оценкой фильтра Калмана. Определена расщепленная задача последовательного усвоения. Приведен пример расчета для случая двумерной распределенной системы и подвижного измерительного комплекса.

## Список литературы

[1] Пененко В.В. Вариационное усвоение данных в реальном времени // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10. Спецвыпуск. Ч. 1 С. 9–20.

[2] Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. AME, J. Basic Eng. 1960. Vol. 82. P. 34–35.

[3] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

[4] Penenko A.V. Sequential variational data assimilation // Proc. of SPIE 2005. Vol. 6160. P. 61602D 1–9.

*Поступила в редакцию 9 ноября 2006 г.*