

АППРОКСИМАЦИЯ ОКРУЖНОСТИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ДИАМЕТРА КРИСТАЛЛА

С. В. Михляев

Институт автоматки и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: mikhlyaev@iae.nsk.su

The particularities of application of the circle fitting methods to measurement the geometry of the growing crystal using digital video system are considered.

Введение

Контроль геометрии кристалла является одной из основных составляющих технологического процесса выращивания кристаллов методом вытягивания. Типичная система контроля диаметра кристалла состоит из видеосистемы, формирующей изображение зоны кристаллообразования, и цифровых средств обработки изображения, реализующих алгоритмы измерения требуемых параметров. Фактически задача измерения диаметра сводится к выделению на изображении точек границы между кристаллом и расплавом и аппроксимации их окружностью.

Аппроксимация точек изображения окружностью применяется в различных прикладных задачах, использующих методы цифровой обработки изображений: в офтальмологии для диагностики зрения [1], распознавания геометрических примитивов на изображениях [2], в системах технического зрения для измерения диаметров цилиндрических объектов [3–5] и т. д. При этом параметры аппроксимирующей окружности определяются различными способами, основанными на выделении характерных точек дуги [1, 3], аппроксимации точек параболой или окружностью с различными критериальными функциями [1, 2, 4–6].

В данной работе исследуются особенности применения методов аппроксимации окружности в задаче измерения диаметра кристалла, выращиваемого методом Чохральского.

Известно значительное количество работ, посвященных методам аппроксимации точек окружностью. Задача оценки параметров аппроксимирующей окружности является нелинейной, поэтому для ее решения применяются в основном итерационные методы [6–10]. Существует также неитерационный подход, позволяющий получить решение в аналитическом виде, но дающий смещенные оценки параметров [9, 10]. Смещение особенно существенно при аппроксимации фрагмента окружности в виде дуги с небольшим значением центрального угла. Для уменьшения смещения оценок параметров разработаны различные подходы, требующие, однако, дополнительных вычислительных затрат [10].

Одним из наиболее известных критериев оптимизации является критерий, используемый в методе наименьших квадратов (МНК) и минимизирующий среднеквадратичное

отклонение точек от аппроксимирующей окружности [10]. Это так называемый геометрический подход, при котором мерой отклонения служит геометрическое расстояние между точкой и окружностью. При реализации этого критерия необходимо использовать нелинейные методы оптимизации, приводящие к существенным вычислительным затратам. Более предпочтительным представляется алгебраический метод (используем для него обозначение МНК2), являющийся по сути методом МНК, но примененный не к расстояниям, а к квадратам расстояний между точками [1, 10]. Метод МНК2 допускает аналитическое решение оптимизационной задачи и поэтому не требует больших вычислительных ресурсов.

Поскольку рассматриваемые методы могут приводить к различным результатам, целесообразно определить условия их применимости. Частично эти вопросы рассматривались в различных публикациях, но в задаче измерения диаметра кристалла существуют свои особенности, рассмотрение которых и является целью данной работы.

В работе на основе численного моделирования исследуются условия применимости критериев МНК и МНК2 для аппроксимации точек окружностью в задаче измерения диаметра кристалла на различных стадиях его выращивания, приводятся зависимости оцениваемых параметров (координат центра и радиуса окружности) от количества исходных точек и погрешности задания их координат от центрального угла аппроксимирующей дуги и ее радиуса. Исследуется влияние дискретизации координат аппроксимируемых точек на оцениваемые параметры, рассматриваются возможности статистической обработки последовательности изображений кристалла.

1. Измерение диаметра кристалла

Система измерения диаметра кристалла состоит, как правило, из одной или нескольких видеокамер, расположенных на ростовой установке и формирующих изображения кристалла, а также цифрового процессора, реализующего алгоритмы обработки изображений и измерения требуемых параметров кристалла. Характеристики изображения существенно зависят от стадии роста кристалла. Можно выделить несколько стадий роста кристалла с существенно различающимися изображениями: затравливание и выращивание шейки кристалла, выращивание прямого конуса, рост кристалла с постоянным диаметром, выращивание обратного конуса.

В данной работе не рассматриваются проблемы, связанные с выделением на изображении точек границы между расплавом и кристаллом, а также проблемы коррекции перспективных искажений, обусловленных наклоном камеры. В результате мы имеем дело лишь с массивами точек, лежащих на фрагменте окружности, попадающем в поле зрения видеосистемы.

На первой стадии, при затравливании и росте шейки кристалла, фрагмент границы представляет собой почти полную окружность, радиус которой увеличивается по мере выращивания конуса. При больших радиусах размер дуги границы ограничивается полем зрения видеосистемы. При росте тела кристалла постоянного диаметра из-за эффектов виньетирования граница кристалла на изображении представляется лишь дугой окружности. Центральный угол дуги θ зависит от геометрии схемы измерения и определяется выражением $\cos(\theta/2) = R/d$, где R — радиус кристалла, d — расстояние видеосистемы от оси кристалла. При выращивании обратного конуса радиус дуги уменьшается, а размер ее видимого фрагмента зависит от геометрии обратного конуса.

Существенным обстоятельством является то, что в процессе роста кристалл вращается вокруг своей оси, поэтому возможны два способа формирования массивов аппроксимируемых точек границы: последовательный, когда необходимый массив формируется путем покадрового накопления точек, и параллельный, когда все точки формируются по одному кадру. Не менее важными факторами являются также наличие на кристалле граней и вариации положения центра аппроксимируемой окружности на изображении, обусловленные возможным раскачиванием кристалла и изменением уровня расплава в зоне кристаллообразования. Пусть N_1 — количество точек в кадре, а N_2 — количество кадров, используемых для получения оценок параметров аппроксимирующей окружности. В работе исследуются вопросы выбора методов аппроксимации и соотношений между N_1 и N_2 , обеспечивающих измерение диаметра кристалла с требуемой точностью на различных стадиях выращивания. Приведем для примера параметры, характерные для процесса выращивания кристалла кремния: диапазон радиусов аппроксимируемой окружности 5...150 мм, допустимая погрешность измерений ± 0.1 мм.

2. Рассматриваемые методы аппроксимации

В простейшем случае для определения параметров аппроксимирующей окружности используются всего три точки, по координатам которых вычисляются радиус и положение центра проходящей через них окружности. Для повышения точности измерений может применяться статистическая обработка последовательности трехточечных выборок аппроксимируемых точек [1, 4]. В общем случае для аппроксимации может использоваться большее количество исходных точек. Применительно к рассматриваемой задаче критерий геометрической оптимизации МНК записывается в виде

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \right)^2 \right\}; \quad (1)$$

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, \quad (2)$$

где (x_j, y_j) — исходные точки изображения ($j = 1, \dots, N$); R — радиус аппроксимирующей окружности; (x_0, y_0) — координаты центра окружности. При реализации критерия (1) необходимо использовать нелинейные методы оптимизации, требующие применения итерационных процедур. Поэтому с точки зрения вычислительных затрат более предпочтительным представляется алгебраический подход к аппроксимации окружности [9, 10]. Критерий оптимизации МНК2 в этом случае записывается аналогично (1), но для квадратов расстояний:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^N \left((x_j - x_{20})^2 + (y_j - y_{20})^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - x_{20})^2 + (y_i - y_{20})^2) \right)^2 \right\}; \quad (3)$$

$$R_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - x_{20})^2 + (y_i - y_{20})^2). \quad (4)$$

В отличие от (1), (2) соотношение (3) имеет аналитическое решение для радиуса (4) и координат центра окружности (x_{20}, y_{20}) :

$$R_2^2 = x_{20}^2 + y_{20}^2 + \frac{1}{N} \sum (x_i^2 + y_i^2) - \frac{2}{N} \left(x_{20} \sum x_i + y_{20} \sum y_i \right); \quad (5)$$

$$x_{20} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) / (a_1 b_2 - b_1^2), \quad y_{20} = (b_1 c_1 - a_1 c_2) / (a_1 b_2 - b_1^2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{N} \left(\sum x_i \right)^2 - 2 \sum x_i^2, \quad a_2 = b_1; \\ b_1 &= \frac{2}{N} \sum x_i \sum y_i - 2 \sum x_i y_i, \quad b_2 = \frac{2}{N} \left(\sum y_i \right)^2 - 2 \sum y_i^2; \\ c_1 &= \sum x_i^3 + \sum x_i y_i^2 - \frac{1}{N} \sum x_i \left(\sum (x_i^2 + y_i^2) \right), \\ c_2 &= \sum y_i^3 + \sum y_i x_i^2 - \frac{1}{N} \sum y_i \left(\sum (x_i^2 + y_i^2) \right). \end{aligned}$$

Основной недостаток алгебраического метода аппроксимации — смещенная оценка положения центра и радиуса окружности, наиболее сильно проявляющаяся при уменьшении центрального угла аппроксимирующей дуги окружности.

3. Результаты моделирования

При моделировании предполагалось, что аппроксимируемые точки (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, N$, принадлежат окружности $x^2 + y^2 = R^2$, они равномерно распределены по углу в диапазоне $|\theta| \leq \theta_0$, а их координаты заданы с погрешностями Δ_{xj} , Δ_{yj} :

$$x_j = R \cos \theta_j + \Delta_{xj}, \quad y_j = R \sin \theta_j + \Delta_{yj}.$$

Использовались различные законы распределения погрешностей: равномерный, гауссовый и дискретный с гауссовым распределением. Последний случай соответствует формированию изображения многоэлементным фотоприемником с конечными размерами фотодетекторов и выделению аппроксимируемых точек границы с точностью до пикселя без использования специальных алгоритмов субпиксельной локализации точек границы.

Предметом исследования при моделировании являлось поведение оценок измеряемых параметров (радиуса и положения центра аппроксимирующей окружности) для рассматриваемых методов аппроксимации, получаемых в соответствии с (1)–(6), в зависимости от различных факторов, в том числе от количества используемых при аппроксимации точек N . Малые значения N привлекательны меньшими вычислительными затратами, в то время как большие значения N могут обеспечить получение более точных оценок требуемых параметров. Для получения статистических характеристик оценок (средних значений и дисперсии) использовалось от 10^4 до 10^5 реализаций.

На рис. 1 представлены зависимости средних значений оценок радиуса, координат центра окружности и среднеквадратичных отклонений радиусов (СКО) для МНК и МНК2 от количества аппроксимируемых точек N при различных значениях центрального угла дуги θ_0 , полученные по $3 \cdot 10^4$ реализациям. Погрешности задания координат распределены по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$ с нулевым средним и $\sigma = 0.3$ мм.

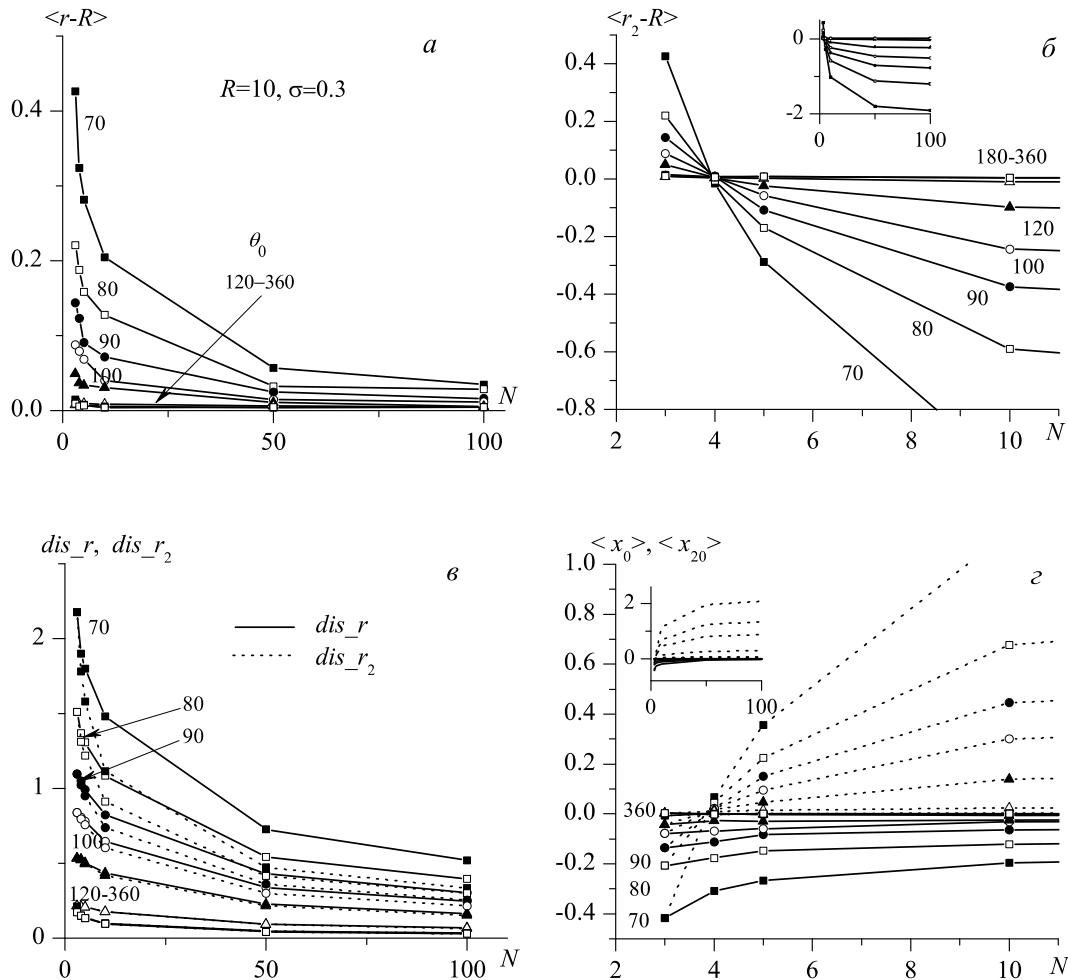


Рис. 1. Зависимости средних значений оценок радиуса $\langle r - R \rangle$ и $\langle r_2 - R \rangle$, координат центра окружности $\langle x_0 \rangle$, $\langle x_{20} \rangle$ и среднеквадратичных отклонений радиусов dis_r , dis_r_2 для МНК и МНК2 от количества аппроксимируемых точек N при различных значениях центрального угла дуги θ_0 ($R = 10$, $\sigma = 0.3$, $\theta_0 = 70 \dots 360^\circ$).

На рис. 1, б и г показаны разномасштабные фрагменты графиков для различных диапазонов изменения N . С увеличением θ_0 абсолютные величины смещений оценок радиуса $\langle r - R \rangle$ и положения центра $\langle x_0 \rangle$ для МНК, а также $\langle r_2 - R \rangle$ и $\langle x_{20} \rangle$ для МНК2 уменьшаются, в то время как при увеличении N они уменьшаются для МНК, а для МНК2 при $N > 4$ возрастают. Среднеквадратичные отклонения оценок для МНК и МНК2 при $\theta_0 > 120^\circ$ примерно одинаковы, но при меньших углах и при $N > 3$ СКО для МНК2 оказывается меньше, чем для МНК. Среднеквадратичные отклонения оценок координат центра окружности x_0 , x_{20} на рис. 1 не представлены, но расчеты показывают, что их величины близки к соответствующим значениям для оценок радиуса окружности. Для $\theta_0 > 180^\circ$ оценки, даваемые двумя методами, практически совпадают, при этом величины смещений для рассматриваемого приложения становятся пренебрежимо малыми. На рис. 2 показаны аналогичные зависимости для различных значений σ при $R = 20$ мм, $\theta_0 = 90^\circ$. Видно, что с уменьшением уровня шума абсолютные величины смещений и СКО снижаются.

Из рис. 1, 2 следует, что основные погрешности измерений возникают при значениях центрального угла дуги $\theta_0 < 180^\circ$. Для $N = 3$ оба метода (МНК и МНК2) дают смещенную оценку. Абсолютная величина смещения оценок для МНК уменьшается при увеличении

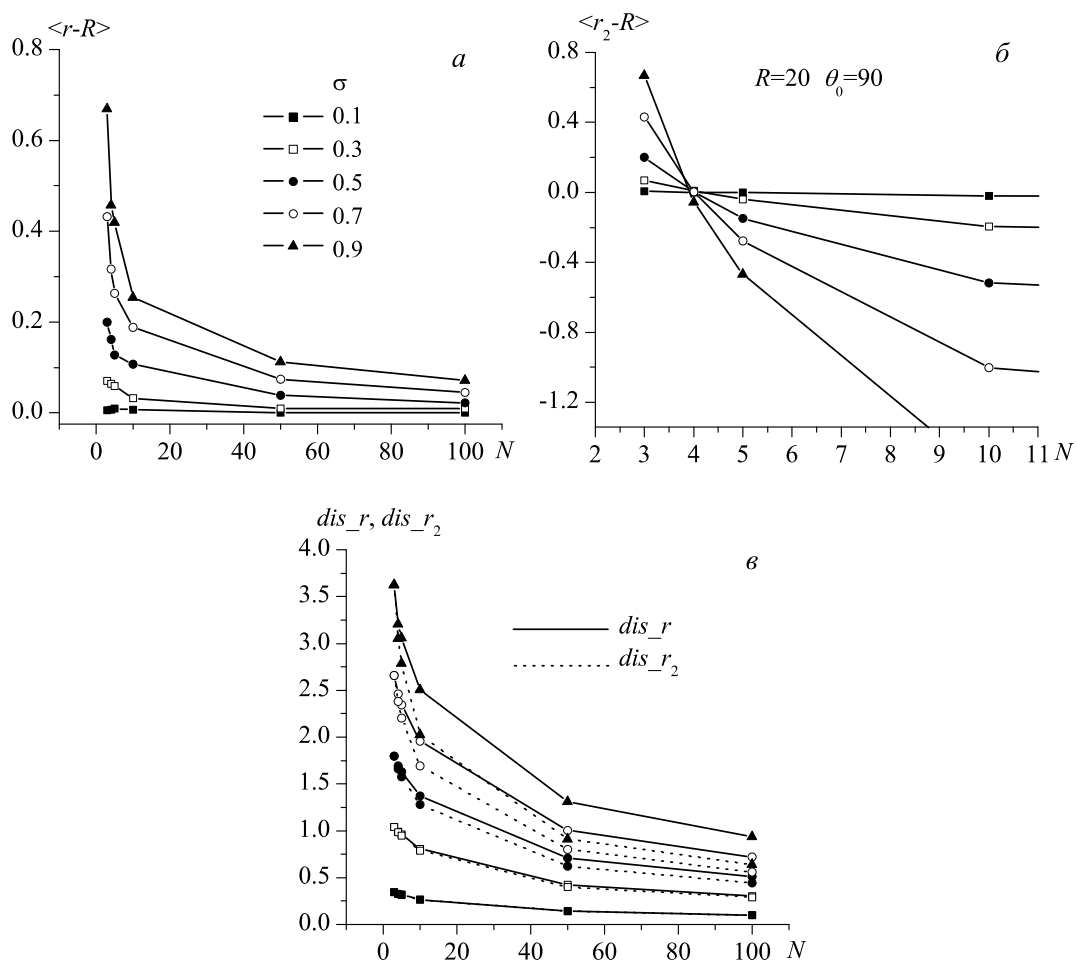


Рис. 2. Зависимости средних значений оценок радиуса $\langle r - R \rangle$ (а), $\langle r_2 - R \rangle$ (б) и среднеквадратичных отклонений радиусов dis_r , dis_r_2 для МНК и МНК2 от N при различном уровне шума σ .

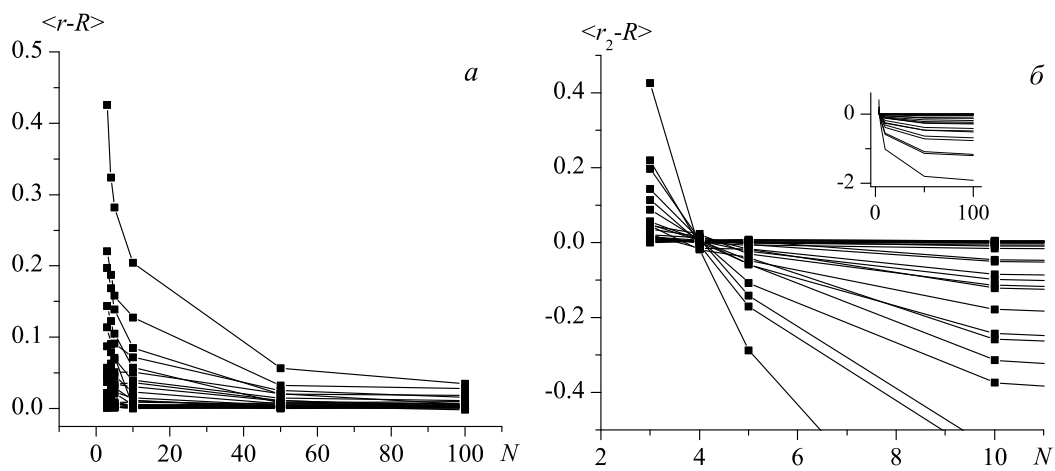


Рис. 3. Зависимости средних значений оценок радиуса $\langle r - R \rangle$ (а), $\langle r_2 - R \rangle$ (б) от N для $\sigma = 0.3$ мм, $R = 10, 20$ и 50 мм и вариациях θ_0 в диапазоне от 70 до 360° .

количества аппроксимируемых точек. Для МНК2 с увеличением N смещение оценок меняет знак с положительного (при $N = 3$) на отрицательный — для радиуса, и наоборот, — для координаты центра, при этом абсолютная величина смещения возрастает. Однако при $N = 4$ смещение для МНК2 становится достаточно малым. Этот вывод справедлив для различных значений R , θ_0 и σ , что подтверждается данными, приведенными на рис. 2, б и рис. 3. Заметим также, что для малых значений θ_0 смещение для МНК2 при $N = 4$ даже меньше, чем для МНК.

Таким образом, МНК2 может быть использован для измерения диаметра кристалла на различных стадиях выращивания, при этом он дает оценку с наименьшим смещением при $N = 4$. Следует отметить, что дисперсия оценки при этом остается значительной и ее снижение может быть обеспечено лишь за счет усреднения результатов при обработке последовательности кадров. Оценка положения оси кристалла (центра аппроксимируемой окружности) в этом случае дает правильные результаты лишь при условии пренебрежимо малых смещений оси кристалла за время измерений или при нулевых средних значениях величины смещения оси, определяемых за время измерения.

Усреднение может производиться также по результатам обработки одного кадра, аппроксимируемые точки при этом должны располагаться в окрестностях четырех исходных точек, соответствующих рассматриваемой четырехточечной схеме измерения. Как показывают расчеты, угловые отклонения аппроксимируемых точек от исходных могут составлять несколько градусов. При необходимости повышения точности измерений следует использовать методы геометрического приближения (типа МНК) и увеличивать количество аппроксимируемых точек.

Заметим, что зависимость величины смещения оценок радиуса от N и θ_0 может быть использована для идентификации таких важнейших характеристик процесса выращивания кристалла, как его подрезка или разрачивание. В случае подрезки диаметр кристалла начинает уменьшаться, при этом уменьшаются длина видимого фрагмента мениска кристалла и, соответственно, центральный угол аппроксимирующей дуги окружности. При разрачивании кристалла происходит обратный процесс и длина аппроксимирующей дуги возрастает. В результате изменение получаемых в МНК или МНК2 оценок радиуса при различных значениях N может служить параметром, характеризующим состояние процесса выращивания, и может использоваться для его регулирования при автоматическом выращивании.

С увеличением размера центрального угла дуги дисперсия и погрешности определения радиуса окружности и положения ее центра уменьшаются, поэтому при затравливании, выращивании шейки кристалла и на начальном этапе выращивания конуса, т. е. во всех случаях, когда угол θ_0 может превышать 180° , для получения необходимых оценок можно использовать МНК2. При меньших значениях θ_0 для снижения погрешности измерений необходимо применять МНК или другие методы, обеспечивающие компенсацию смещения оценки. Кроме того, с уменьшением θ_0 из-за возрастания дисперсии результатов измерений требуется увеличивать количество точек, участвующих в аппроксимации, или использовать данные нескольких кадров для усреднения результатов.

Погрешность измерений зависит от отношения Δ/R и уменьшается при увеличении радиуса кристалла или снижении погрешности определения координат точек границы. Дисперсия существенно зависит от количества аппроксимируемых точек. Поэтому для повышения точности измерений для небольших значений радиуса следует увеличивать количество используемых точек и уменьшать Δ за счет аппаратных средств (путем изменения масштаба изображения кристалла) или применения алгоритмов субпиксельной

локализации точек границы.

Результаты, соответствующие использованию различного количества точек в кадре N_1 и различной длине последовательности обрабатываемых кадров N_2 , представлены на рис. 4 для случая $N_1 N_2 \approx 100$ в зависимости от θ_0 .

Как следует из рис. 4, параметры N_1 и N_2 не эквивалентны. Для больших значений θ_0 результаты для МНК и МНК2 практически совпадают как по СКО, так и по смещению оценки. Для малых θ_0 лучшие результаты по величине смещения для МНК достигаются в данном случае при $N_1 = 100$, для МНК2 — при $N_1 = 4$, в то время как минимальное значение СКО для МНК и МНК2 обеспечивается при $N_1 = 3$. Для МНК2 при $\theta_0 = 80^\circ$ и $N_1 = 4$, $N_2 = 25$ СКО составляет 0.27, а для МНК — 0.38 (при $N_1 = 100$), поэтому сравнимые результаты для МНК могут быть получены при обработке всего двух-трех кадров вместо используемых для этого 25 кадров в МНК2. Существенно, что при использовании МНК в этом случае существенно снижаются требования на ограничение величины возможных смещений оси кристалла за время формирования обрабатываемой кадровой последовательности, хотя время расчета при этом может быть больше.

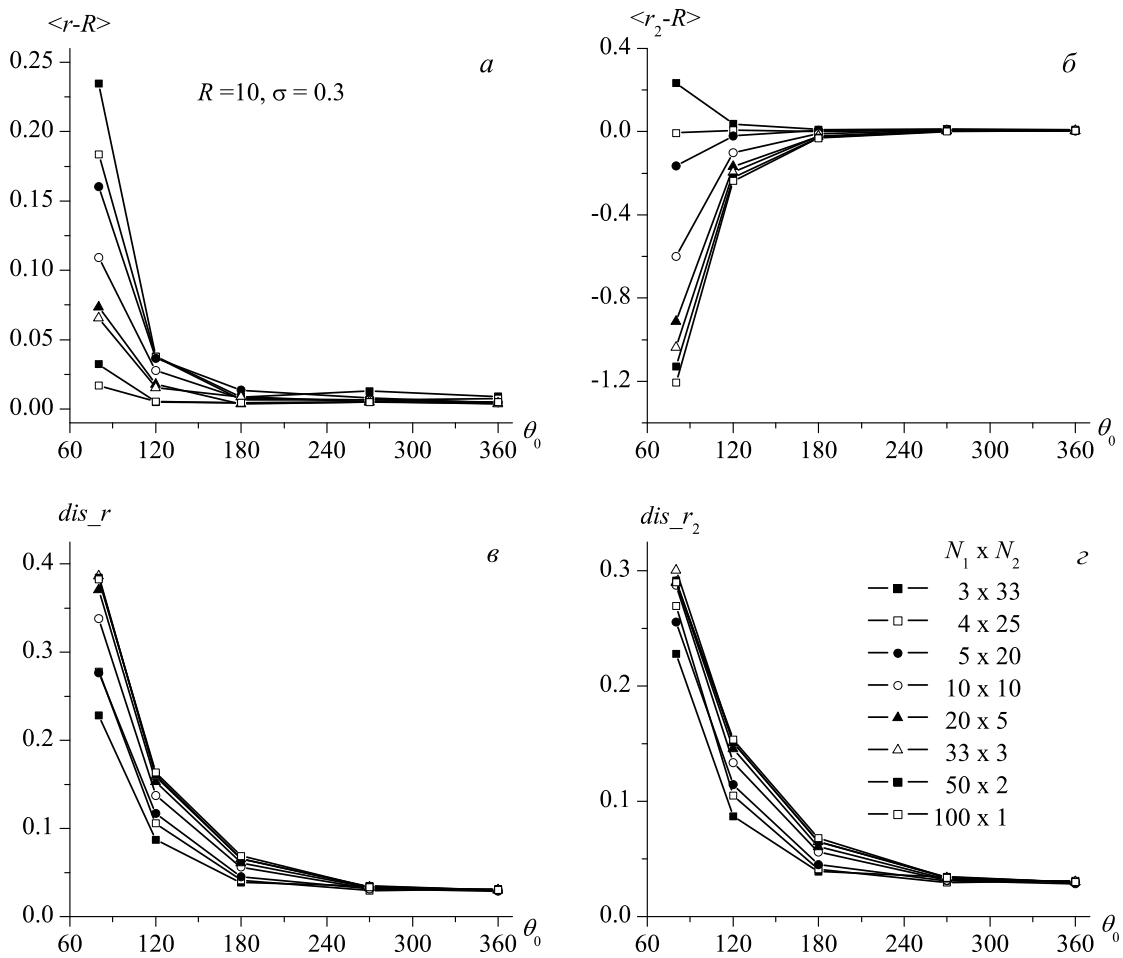


Рис. 4. Зависимости средних значений оценок радиуса $\langle r - R \rangle$, $\langle r_2 - R \rangle$ и среднеквадратичных отклонений dis_r , dis_r_2 от θ_0 для различных соотношений между количеством аппроксимируемых точек в кадре N_1 и количеством обрабатываемых кадров N_2 ($R = 10$ мм, $\sigma = 0.3$ мм).

Для методов геометрической аппроксимации (МНК и др.) минимальное количество точек, используемых для аппроксимации, определяется по допустимому уровню смещения оценки. Для МНК2 минимальное смещение достигается при $N_1 = 4$, а при $\theta_0 \geq 180^\circ$ смещение остается малым и при больших значениях N_1 . Дисперсия может быть уменьшена за счет как увеличения количества аппроксимируемых точек, так и увеличения длины обрабатываемой кадровой последовательности.

Результаты исследования влияния дискретизации обрабатываемых цифровых изображений на оцениваемые параметры представлены на рис. 5. Дискретизация обусловлена конечным размером фотоприемного элемента δ , формирующего пиксель изображения, и проявляется в случае, если при определении координат аппроксимируемых точек не используются методы субпиксельной локализации. Поскольку такие методы требуют дополнительных вычислительных затрат, представляется целесообразным определить условия, при которых субпиксельная локализация может не использоваться. На рис. 5, *a* и *б* приведены зависимости оцениваемых параметров для различных смещений d_c центра аппроксимируемой окружности относительно многоэлементного фотоприемника при $R = 20$ мм, $\theta_0 = 90^\circ$, $\delta = 0.3$ мм. При $d_c = 0$ центр окружности совпадает с центром фотоприемного

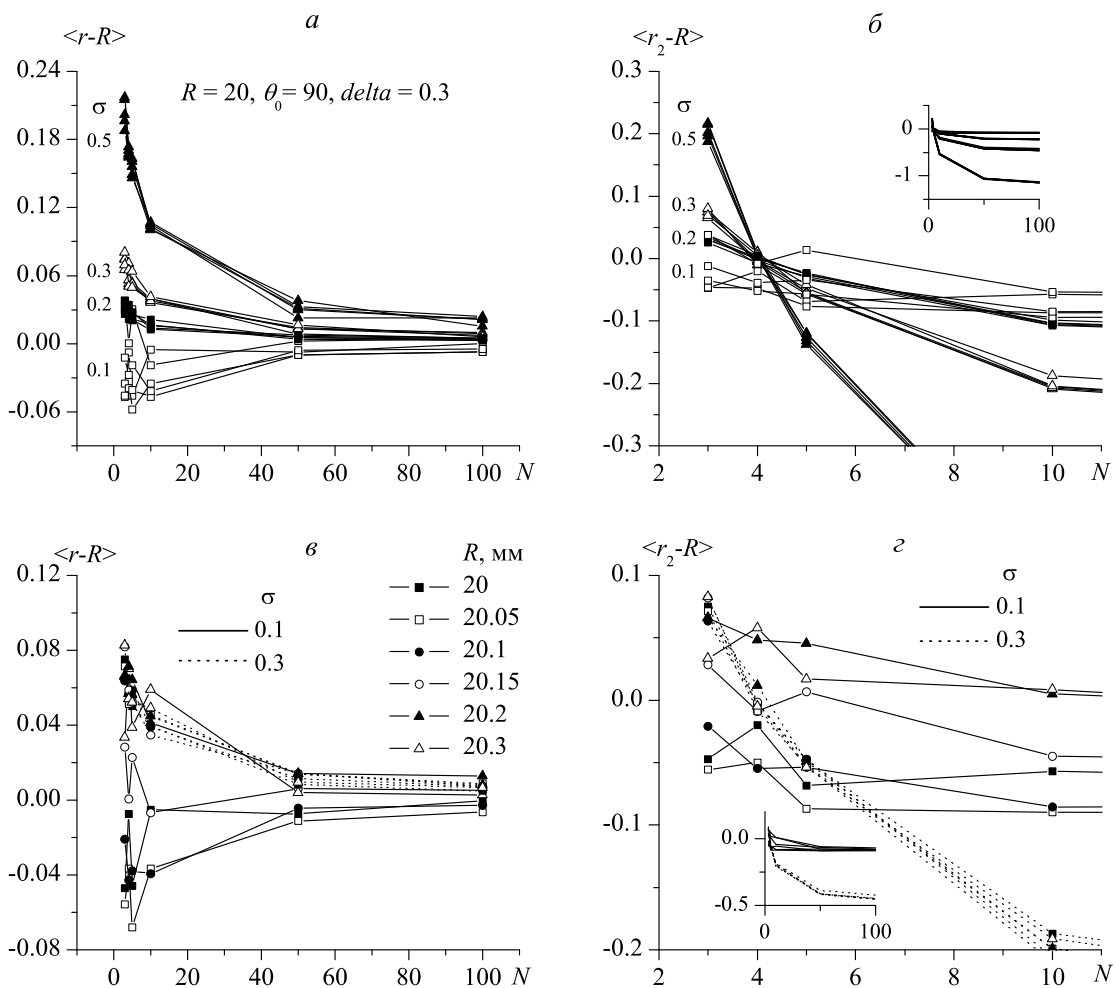


Рис. 5. Зависимости средних значений оценок радиуса $\langle r - R \rangle$, $\langle r_2 - R \rangle$ от N для различных смещений (от 0 до 0.15 мм) изображения кристалла относительно центра дискретного фотоприемника (*a*, *б*) и небольших изменений радиуса окружности (*в*, *г*).

элемента. Показанные на рис. 5, *a* и *б* группы линий соответствуют различным значениям уровня шума σ , а линии в каждой группе — различным смещениям d_c от 0 до 0.15 мм. На рис. 5, *в* и *г* показаны аналогичные зависимости, но при небольших изменениях радиуса окружности от 20 до 20.3 мм и для двух значений σ . Из рис. 5 следует, что наиболее существенно дискретизация проявляется при небольшом количестве аппроксимируемых точек и значениях $\sigma < \delta$. При $\sigma > \delta$ основным фактором, определяющим точность измерений, становится уровень шумовой составляющей при определении координат аппроксимируемых точек.

Следует отметить, что основные закономерности, полученные для гауссова шума, сохраняются и при шуме с равномерным распределением, хотя количественные характеристики несколько изменяются. При необходимости измерения геометрических параметров граней кристалла количество точек для аппроксимации должно быть согласовано с размерами и особенностями геометрии граней. Данное обстоятельство может быть определяющим при выборе количества аппроксимируемых точек, особенно при больших радиусах кристалла и малых угловых размерах граней.

Заключение

В работе рассмотрены методы геометрической и алгебраической аппроксимации точек окружностью, исследованы условия их применимости при измерении геометрии кристалла в процессе выращивания.

Показано, что метод МНК2, обеспечивающий аналитическое решение для оценок радиуса и координат центра аппроксимирующей окружности, может быть эффективен при измерениях параметров кристалла на стадиях затравливания, выращивания шейки кристалла и начальной стадии выращивания конуса, когда центральный угол аппроксимирующей дуги θ_0 превышает $150 \dots 180^\circ$. При меньших значениях θ_0 он дает существенно смещенные оценки, поэтому в этом случае предпочтение следует отдать итерационному методу МНК или его аналогам, основанным на геометрической аппроксимации. В то же время при четырехточечной схеме измерения метод МНК2 обеспечивает минимальные смещения оценок, близкие к нулевым значениям, и может использоваться при измерениях с малыми величинами угла θ_0 .

Зависимость величины смещения от количества точек N и углового размера дуги θ_0 дает возможность идентификации таких важнейших характеристик процесса выращивания кристалла, как его подрезка или разрачивание.

Дисперсия оценок параметров существенно зависит от количества используемых при аппроксимации точек изображения N , поэтому для снижения дисперсии при малых значениях N необходимо увеличивать длину обрабатываемой последовательности изображений (кадров) или усреднять оценки, используя дополнительные выборки точек в кадре. Длина кадровой последовательности при этом ограничивается допустимым временем на ее формирование и обработку, зависящим от параметров технологического процесса (угловой скорости вращения кристалла, скорости вытягивания кристалла и т. д.).

Эффективной мерой снижения дисперсии является также повышение точности определения координат исходных точек, что обеспечивается при использовании методов субпиксельной локализации точек изображения и применении аппаратных средств, повышающих разрешение анализируемых изображений. Для больших значений N можно обойтись без субпиксельной локализации точек, поскольку дискретизация координат, обусловленная

конечным размером фотоприемного элемента δ , проявляется в основном лишь при небольшом количестве аппроксимируемых точек и значениях $\sigma < \delta$. При $\sigma > \delta$ основным фактором, определяющим точность измерений, становится уровень шумовой составляющей при определении координат аппроксимируемых точек.

При необходимости измерения геометрических параметров граней кристалла количество точек для аппроксимации должно быть согласовано с размерами и особенностями геометрии граней. Данное обстоятельство может быть определяющим при выборе количества аппроксимируемых точек, особенно при больших радиусах кристалла и малых угловых размерах граней.

Список литературы

- [1] БАРАНОВ В.Г., ИЛЬЯСОВ Н.Ю. и др. Бесконтактное измерение радиуса кривизны сферических поверхностей // Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии (РОАИ-5-2000): Тр. Междунар. конф., Самара, 2000. Т. 3. С. 458–462.
- [2] ГРИВОВ М.Г., ХАЧУМОВ В.М. Определение геометрических параметров объектов по растровым изображениям // Автометрия. 2001. № 1. С. 40–49.
- [3] DEMEYERE M., DEREINE E., EUGENE C., NAYDENOV V. Measurement of cylindrical objects through laser telemetry: application to a new forest caliper // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. 2002. Vol. 51, N 4. P. 645–649.
- [4] MIKHLYAEV S.V. Method for measuring the diameter of a growing crystal // Pattern Recognition and Image Analysis. 2005. Vol. 15, N 4. P. 690–693.
- [5] MIKHLYAEV S.V. Measuring the diameter of a growing crystal // Proc. of the Second IASTED Int. Conf. Automation, Control and Information Technology. Novosibirsk, Russia. 2005. P. 53–58.
- [6] ZHANG Z. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting // Image and Vision Computing. 1997. Vol. 15, N 1. P. 59–76.
- [7] MARQUARDT D. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters // SIAM J. Appl. Math. 1963. Vol. 11. P. 431–441.
- [8] LANDAU U.M. Estimation of a circular arc center and its radius // Computer Vision, Graphics and Image Proc. 1987. Vol. 38. P. 317–326.
- [9] SPATH H. Least-squares fitting by circles // Computing. 1996. Vol. 57, N 2. P. 179–185.
- [10] CHERNOV N., LESORT C. Least squares fitting of circles // J. of Math. Imaging and Vision. 2005. Vol. 23. P. 239–251.

*Поступила в редакцию 25 сентября 2006 г.,
в переработанном виде — 22 ноября 2006 г.*