

# ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА\*

А. М. БЛОХИН

*Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева,*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: [Blokhin@math.nsc.ru](mailto:Blokhin@math.nsc.ru)

А. С. ИБРАГИМОВА, Н. Ю. КРАСНИКОВ

*Новосибирский государственный университет, Россия*

e-mail: [Ibragimova@ngs.ru](mailto:Ibragimova@ngs.ru)

A theoretical justification of one algorithm for finding an approximate solution of the mixed boundary value problem for the Poisson equation is given.

## Введение

В последние годы в вычислительной практике довольно широкое распространение получил *метод прямых*. Суть этого метода заключается в том, что в исходной дифференциальной задаче производится дискретизация только по части независимых переменных, т. е. исходное уравнение в частных производных аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы будем называть полученную таким образом вычислительную модель *дифференциально-разностной моделью*.

Однако возможны и другие приемы получения вычислительных моделей в методе прямых. Например, вместе с дискретизацией, скажем, по одной из независимых переменных можно использовать аппроксимацию производной по другой переменной с применением *интерполяционных многочленов*. Именно такой подход обсуждается в настоящей работе на примере *уравнения Пуассона*.

Поскольку при использовании метода прямых для конкретного случая мы сводим исходную проблему к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникает вопрос о нахождении ее приближенного решения. Хотя в настоящее время существует достаточно много алгоритмов численного решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, мы предлагаем в данной работе еще один способ нахождения приближенных решений таких краевых задач, использующий методы сплайн-функций.

Работа носит теоретический характер. Результаты численных экспериментов будут предметом для обсуждения в следующих работах.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00900 и № 06-08-00384) и междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН-2006 № 46.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2007.

## 1. Предварительные сведения

В настоящее время для описания физических процессов в полупроводниковых устройствах часто применяют так называемые *гидродинамические модели* (одна из моделей описана в работе [1]). Эта математическая модель содержит также *уравнение Пуассона* для *электрического потенциала*  $\varphi$  (см., например, [1, 2]). На рис. 1 приведены *граничные условия* для потенциала  $\varphi$  в случае полупроводникового транзистора с электронной проводимостью (подробно такой транзистор описан в работах [1, 2]). Итак, рассмотрим в области  $\Omega$  уравнение Пуассона для потенциала  $\varphi = \varphi(x, y)$ :

$$\Delta_{x,y}\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = f(x, y) \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y &= 0 \text{ при } y = 0, \quad 0 < x < 6a; \\ \varphi_x &= 0 \text{ при } x = 0, \quad 6a, \quad 0 < y < 2a; \\ \varphi &= 0 \text{ при } y = 2a, \quad 0 < x < a; \\ \varphi &= G = \text{const} \text{ при } y = 2a, \quad 2a < x < 4a; \\ \varphi &= B = \text{const} \text{ при } y = 2a, \quad 5a < x < 6a; \\ \varphi_y &= 0 \text{ при } y = 2a, \quad a < x < 2a \text{ и } 4a < x < 5a. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Здесь  $x, y$  — безразмерные независимые переменные;  $f(x, y)$  — известная правая часть;  $a > 0$  — некоторая переменная. Не нарушая общности, положим далее, что  $a = \pi/6$ .

Далее, вместо (1.1) мы будем рассматривать *параболическую регуляризацию* этого уравнения:

$$\varphi_t = \Delta_{x,y}\varphi - f(x, y), \quad \varphi = \varphi(t, x, y), \quad (1.1')$$

где  $t$  — независимая переменная, играющая роль времени. Краевые условия для уравнения (1.1') оставим теми же самыми (см. (1.2)). Добавляя к (1.1') и (1.2) *начальное условие*

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad (1.3)$$

решение исходной задачи (1.1) и (1.2) будем искать, используя метод установления (по поводу этого метода см. работу [3]), т. е. вычисляя предел решения смешанной задачи (1.1'), (1.2) и (1.3) при  $t \rightarrow \infty$ .

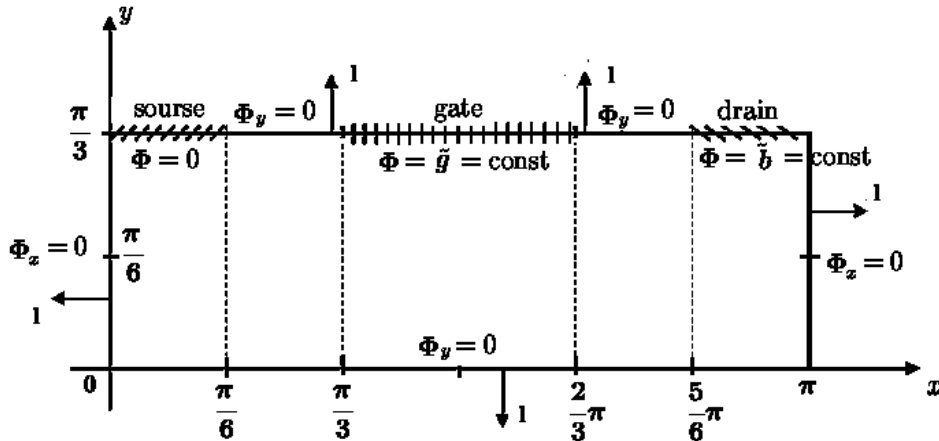


Рис. 1. Область  $\Omega$  и граница  $\partial\Omega$ .

Как известно (см. [3]), для обоснования метода установления надо доказать *асимптотическую устойчивость* (по Ляпунову) стационарного решения  $\psi(x, y)$  смешанной задачи (1.1'), (1.2) и (1.3). С этой целью введем функцию

$$U = U(t, x, y) = \varphi(t, x, y) - \psi(x, y)$$

и сформулируем смешанную задачу для нахождения  $U$ :

$$U_t - \Delta_{x,y}U = 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1.4)$$

$$U = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (\mathbf{1}, \nabla U) = 0 \text{ на } \Gamma_l, \quad t > 0; \quad (1.5)$$

$$U|_{t=0} = U_0(x, y) = \varphi_0(x, y) - \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) : y = \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi, \quad \frac{5}{6}\pi \leq x \leq \pi \right\}$$

— часть границы  $\partial\Omega$  (рис. 1);  $\Gamma_l = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ ;  $\mathbf{1}$  — единичный вектор внешней нормали;  $\nabla U = (U_x, U_y)$ .

Умножим уравнение (1.4) слева на  $2U$ . После несложных выкладок мы получаем

$$(U^2)_t - 2\operatorname{div}(U\nabla U) + 2|\nabla U|^2 = 0,$$

$$|\nabla U|^2 = (\nabla U, \nabla U) = U_x^2 + U_y^2.$$

Проинтегрируем полученное выражение по области  $\Omega$ . Применяя *формулу Остроградского — Гаусса*, придем к следующему соотношению:

$$(\|U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2)_t + 2\|\nabla U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\partial\Omega} U(\mathbf{1}, \nabla U) dS = 0, \quad (1.7)$$

где

$$\|U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} U^2(t, x, y) dx dy;$$

$$\|\nabla U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla U(t, x, y)|^2 dx dy.$$

Используя известное *неравенство Фридрикса* [2]

$$\|U(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \mathbb{C}_1 \|\nabla U(t)\|_{L_2(\Omega)},$$

где  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_1(\Omega, \Gamma_0) > 0$  — постоянная, и учитывая краевые условия (1.5), из (1.7) получаем

$$(\|U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2)_t + \frac{2}{\mathbb{C}_1^2} \|U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

т. е.

$$\|U(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^{-\frac{2}{\mathbb{C}_1^2}t} \|U_0\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad t > 0. \quad (1.8)$$

Здесь

$$\|U_0\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} U_0^2(x, y) dx dy.$$

Неравенство (1.8) означает, что решение  $\psi(x, y)$  (решение исходной краевой задачи (1.1) и (1.2)) *асимптотически устойчиво (по Ляпунову)*.

Для нахождения приближенного решения смешанной задачи (1.1'), (1.2), (1.3) применим *метод прямых*. Производную  $\varphi_{xx}$  в уравнении (1.1') заменим не разностным отношением (как это обычно принято), а используем для аппроксимации ее *интерполяционный многочлен*. В соответствии с рекомендациями из [3] в качестве узлов интерполяции выбираем нули *многочлена Чебышева*. Пусть известны значения четной функции  $\varphi(t, x, y)$  в узлах (рис. 2)

$$\left. \begin{aligned} x = x_j = \frac{2j-1}{2N}\pi, \quad j = \overline{1, N}, \\ \varphi(t, x_j, y) = \varphi_j(t, y). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Формула интерполирования четной функции  $\varphi(t, x, y)$  будет иметь следующий вид [3]:

$$\mathcal{P}(x, \varphi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \frac{\sin x_i}{\cos x - \cos x_i} \cos(Nx) \varphi_i(t, y), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1.10)$$

Используя правило Лопиталя, из (1.10) получаем

$$\mathcal{P}(x_j, \varphi) = \varphi_j(t, y), \quad j = \overline{1, N}.$$

Дифференцируя соотношение (1.10) по  $x$  нужное количество раз, придем к следующим выражениям:

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, \varphi)}{\partial x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \sin x_i \varphi_i(t, y) \left\{ -\frac{N \sin(Nx)}{\cos x - \cos x_i} + \frac{\cos(Nx) \sin x}{(\cos x - \cos x_i)^2} \right\}; \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{P}(x, \varphi)}{\partial x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \sin x_i \varphi_i(t, y) \left\{ -\frac{N^2 \cos(Nx)}{\cos x - \cos x_i} - 2 \frac{N \sin(Nx) \sin x}{(\cos x - \cos x_i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\cos(Nx) \cos x}{(\cos x - \cos x_i)^2} + 2 \frac{\cos(Nx) \sin^2 x}{(\cos x - \cos x_i)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Замечание 1.1.** Из (1.11) следует, что

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(x, \varphi)}{\partial x} \right|_{x=0, \pi} = 0,$$

т. е. интерполяционная формула (1.10) автоматически удовлетворяет краевым условиям при  $x = 0$  и  $x = \pi$  (см. граничные условия (1.2)).

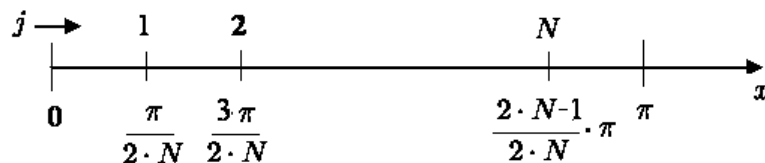


Рис. 2. Узлы интерполяции.

Учитывая соотношения

$$\cos(Nx_j) = 0, \quad \sin(Nx_j) = (-1)^{j+1}, \quad j = \overline{1, N}$$

и используя правило Лопиталья, из (1.11) и (1.12) последовательно получаем

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(x, \varphi)}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+j-1} \frac{\sin x_i \varphi_i(t, y)}{\cos x_j - \cos x_i} - \frac{1}{2} ctg x_j \varphi_j(t, y), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{P}(x, \varphi)}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} &= 2 \sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+j-1} \frac{\sin x_i \sin x_j \varphi_i(t, y)}{(\cos x_j - \cos x_i)^2} \\ &\quad - \left\{ \frac{N^2 - 1}{3} - \frac{1}{2} ctg^2 x_j \right\} \varphi_j(t, y). \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Замечание 1.2.** Выражение

$$\frac{2 \sin x_i \sin x_j}{(\cos x_j - \cos x_i)^2}$$

преобразуем так:

$$\frac{2 \sin x_i \sin x_j}{(\cos x_j - \cos x_i)^2} = \frac{\cos(2\beta_{ij}) - \cos(2\alpha_{ij})}{4 \sin^2 \alpha_{ij} \sin^2 \beta_{ij}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \beta_{ij}} - \frac{1}{\sin^2 \alpha_{ij}} \right\} = b_{ij}, \quad (1.15)$$

где

$$\beta_{ij} = \frac{i-j}{2N} \pi, \quad \alpha_{ij} = \frac{i+j-1}{2N} \pi.$$

В уравнении (1.1') положим  $x = x_j$  и агрегат  $\varphi_{xx}|_{x=x_j}$  заменим выражением (1.14). В итоге будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi_j(t, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_j(t, y)}{\partial t} + \mu_j \varphi_j(t, y) + \sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+j} b_{ij} \varphi_i(t, y) + f_j(y), \quad j = \overline{1, N}. \quad (1.16)$$

Здесь  $\mu_j = \frac{N^2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2 \sin^2 x_j}$ ;  $f_j(y) = f(x_j, y)$ .

В (1.16) проведем также дискретизацию по переменной  $t$ . С этой целью введем следующие обозначения:  $\varphi_j^n(y) = \varphi_j(n\Delta, y) = \varphi_j(y)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\hat{\varphi}_j(y) = \varphi_j^{n+1}(y)$ ,  $\Delta$  — шаг разностной сетки по переменной  $t$ .

Аппроксимируя производную  $\frac{\partial \varphi_j(t, y)}{\partial t}$  выражением  $\frac{\hat{\varphi}_j(y) - \varphi_j(y)}{\Delta}$ , перепишем (1.16) так:

$$\hat{\varphi}_j''(y) = \tilde{\mu}_j \hat{\varphi}_j(y) + \sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+j} b_{ij} \hat{\varphi}_i(y) + \tilde{f}_j(y), \quad j = \overline{1, N}. \quad (1.17)$$

Здесь

$$\tilde{\mu}_j = \mu_j + \frac{1}{\Delta}, \quad \tilde{f}_j(y) = f_j(y) - \frac{\varphi_j(y)}{\Delta}.$$

Систему (1.17) перепишем в векторном виде:

$$\Phi'' = \mathcal{B}\Phi + \vec{\mathcal{F}}, \quad (1.17')$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1(y) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_N(y) \end{pmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(y) \\ \vdots \\ \tilde{f}_N(y) \end{pmatrix};$$

$\mathcal{B} = m + \tilde{B}$ ;  $m = \text{diag}(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_N)$  — диагональная матрица;

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}_{21} & \dots & \tilde{b}_{N1} \\ \tilde{b}_{12} & 0 & \dots & \tilde{b}_{N2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{b}_{1N} & \tilde{b}_{2N} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \tilde{B}^*;$$

$$\tilde{b}_{ij} = (-1)^{i+j} b_{ij}.$$

**Замечание 1.3.** Далее мы будем полагать, что  $m > 0$  и матрица  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$  с доминирующей диагональю [4], т. е.  $\mathcal{B} > 0$  (за счет выбора шага  $\Delta$  этого всегда можно добиться).

К системе (1.17') надо добавить краевые условия (см. (1.2)):

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(0) &= 0, \\ \nu_0 \Phi' \left( \frac{\pi}{3} \right) + \nu_1 \Phi \left( \frac{\pi}{3} \right) &= \vec{\nu}_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Здесь  $\nu_{0,1}$  — диагональные матрицы порядка  $N$  (диагональные элементы равны либо нулю, либо 1), причем  $\nu_0 + \nu_1 = I_N$ ,  $I_N$  — единичная матрица порядка  $N$ ;  $\vec{\nu}_2$  — вектор размерности  $N$  (компоненты вектора  $\vec{\nu}_2$  равны нулю, либо  $G$ , либо  $B$ ).

## 2. Разрешимость краевой задачи (1.17') и (1.18)

Обсудим теперь очень важный для всей работы вопрос о разрешимости сформулированной выше краевой задачи (1.17') и (1.18). Поскольку матрица  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* > 0$ , рассмотрим матрицу  $\Lambda = \mathcal{B}^{1/2}$ . Матрицу  $\Lambda$  можно определить так. Существует ортогональная матрица  $T = T(\mathcal{B})$  такая, что [4]

$$\mathcal{B} = TDT^*, \quad T^{-1} = T^*,$$

где  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  — диагональная матрица порядка  $N$ ;  $\lambda_j = \lambda_j(\mathcal{B}) > 0$ ,  $j = \overline{1, N}$  — собственные значения матрицы  $\mathcal{B}$ . Тогда  $\Lambda = \mathcal{B}^{1/2} = TD^{1/2}T^*$ . Здесь  $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_N})$ .

Переформулируем краевую задачу (1.17') и (1.18) так. Сконструируем вектор

$$\mathbf{V}(y) = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

где  $\Psi = \Phi' - \Lambda\Phi$ . Тогда систему (1.17') можем переписать следующим образом:

$$\mathbf{V}'(y) = M\mathbf{V}(y) + \mathbf{F}(y). \quad (2.1)$$

Здесь  $M = \begin{pmatrix} \Lambda & I_N \\ O_N & -\Lambda \end{pmatrix}$  — квадратная блочная матрица порядка  $2N$ ;  $O_N$  — квадратная

нулевая матрица порядка  $N$ ;  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \vec{O}_N \\ \vec{F} \end{pmatrix}$  — вектор правых частей размерности  $2N$ ;  $\mathbf{O}_N$  — нулевой вектор размерности  $N$ .

Краевые условия (1.18) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} (\Lambda, I_N)\mathbf{V}(0) &= 0, \\ (\tilde{\nu}_1, \nu_0)\mathbf{V}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \tilde{\nu}_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где  $(\Lambda, I_N)$ ,  $(\tilde{\nu}_1, \nu_0)$  — блочные матрицы размерности  $N \times 2N$ ;  $\tilde{\nu}_1 = \nu_0\Lambda + \nu_1$ .

Решение краевой задачи (2.1) и (2.2) ищем в таком виде (см. по этому поводу также [5]):

$$\vec{V}(y) = e^{yM}\vec{V}(0) + \int_0^y e^{(y-s)M}\vec{F}(s)ds,$$

причем вектор  $\vec{V}(0)$  определяется из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{K}\vec{V}(0) = \vec{\varphi}. \quad (2.3)$$

Матрицу  $\mathcal{K}$  и вектор  $\vec{\varphi}$  выпишем ниже. Сначала же покажем, как вычисляется матричная экспонента  $e^{yM}$ . С этой целью воспользуемся так называемым *разложением Холецкого* [6]

$$M = Q \text{ block diag}(\Lambda, -\Lambda)Q^{-1}, \quad (2.4)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} I_N & \chi \\ O_N & I_N \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_N & -\chi \\ O_N & I_N \end{pmatrix}$$

— блочные квадратные матрицы порядка  $2N$ ;  $\chi = -1/2 \cdot \Lambda^{-1}$ . Тогда (см. [5, 6])

$$e^{yM} = Q \text{ block diag}(e^{y\Lambda}, e^{-y\Lambda})Q^{-1} = \begin{pmatrix} e^{y\Lambda} & \frac{e^{y\Lambda}\Lambda^{-1} - \Lambda^{-1}e^{-y\Lambda}}{2} \\ O_N & e^{-y\Lambda} \end{pmatrix}$$

— блочная квадратная матрица порядка  $2N$ , при этом  $e^{y\Lambda} = T \text{diag}(e^{y\sqrt{\lambda_1}}, \dots, e^{y\sqrt{\lambda_N}})T^*$  — квадратная матрица порядка  $N$ .

Вычисляя вектор  $\vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)$  и подставляя его в (2.2), выпишем матрицу  $\mathcal{K}$  и вектор  $\vec{\varphi}$ :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \Lambda & I_N \\ \tilde{\nu}_1 e^{\frac{\pi}{3}\Lambda} & \tilde{\nu}_1 \frac{e^{\frac{\pi}{3}\Lambda}\Lambda^{-1} - \Lambda^{-1}e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda}}{2} + \nu_0 e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda} \end{pmatrix}$$

— квадратная блочная матрица порядка  $2N$ ;  $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \vec{O}_N \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}$  — вектор размерности  $2N$ ;

$$\tilde{\nu}_2 = \tilde{\nu}_2 - (\tilde{\nu}_1, \nu_0)e^{\frac{\pi}{3}M} \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-sM}\vec{F}(s)ds.$$

Система (2.3) однозначно разрешима, если

$$\det \mathcal{K} \neq 0. \quad (2.5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{K} &= \det \Lambda \det \left\{ \tilde{\nu}_1 \frac{e^{\frac{\pi}{3}\Lambda} \Lambda^{-1} - \Lambda^{-1} e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda}}{2} + \nu_0 e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda} - \tilde{\nu}_1 e^{\frac{\pi}{3}\Lambda} \Lambda^{-1} \right\} = \\
&= \det \Lambda \det \left\{ -\tilde{\nu}_1 \frac{e^{\frac{\pi}{3}\Lambda} \Lambda^{-1} + \Lambda^{-1} e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda}}{2} + \nu_0 e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda} \right\} = \\
&= \det \Lambda \det \left\{ \nu_0 \frac{e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda} - e^{\frac{\pi}{3}\Lambda}}{2} - \nu_1 \Lambda^{-1} \frac{e^{-\frac{\pi}{3}\Lambda} + e^{\frac{\pi}{3}\Lambda}}{2} \right\} = \\
&= \left( -\frac{1}{2} \right)^N \det \Lambda \det T^* \det \left\{ \nu_0 T \text{diag} (1 - e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}}, \dots, 1 - e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_N}}) + \right. \\
&\quad \left. + \nu_1 T \text{diag} \left( \frac{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}}}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_N}}}{\sqrt{\lambda_N}} \right) \right\} \det (e^{\frac{\pi}{3}\Lambda}) = \\
&= \left( -\frac{1}{2} \right)^N \det \Lambda \det T^* \det (e^{\frac{\pi}{3}\Lambda}) \det T \prod_{j=1}^N \left( \frac{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_j}}}{\sqrt{\lambda_j}} \right) \times \\
&\quad \times \det \left\{ \nu_0 T \text{diag} \left( \sqrt{\lambda_1} \frac{1 - e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}}}{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}}}, \dots, \sqrt{\lambda_N} \frac{1 - e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_N}}}{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_N}}} \right) T^* + \nu_1 \right\},
\end{aligned}$$

условие (2.5) выполнено, если

$$\det (\nu_0 \cdot \mathcal{A} + \nu_1) \neq 0. \quad (2.5')$$

Здесь

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = T \text{diag} \left( \sqrt{\lambda_1} \frac{1 - e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}}}{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_1}}}, \dots, \sqrt{\lambda_N} \frac{1 - e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_N}}}{1 + e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\lambda_N}}} \right) T^* > 0.$$

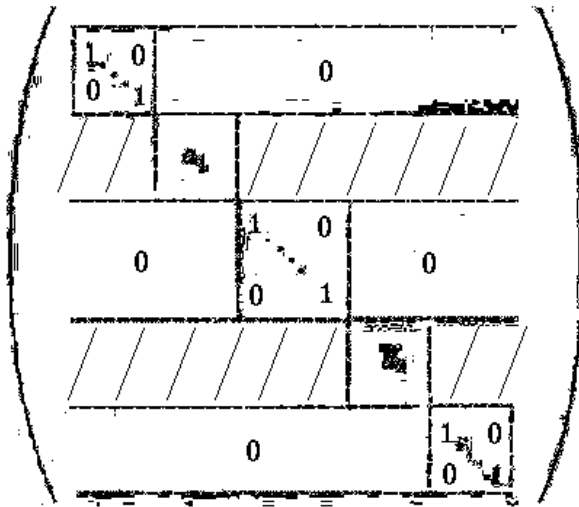


Рис. 3. Матрица  $\nu_0 \cdot \mathcal{A} + \nu_1$ .



На рис. 3 схематично изображена матрица  $\nu_0 \cdot \mathcal{A} + \nu_1$ . Здесь заштрихованы массивы матрицы  $\nu_0 \cdot \mathcal{A} + \nu_1$ , равные соответствующим массивам матрицы  $\mathcal{A}$ . Следовательно,

$$\det(\nu_0 \cdot \mathcal{A} + \nu_1) = \det a_1 \cdot \det a_2 \neq 0,$$

поскольку  $\mathcal{A} > 0$ . Таким образом, решение краевой задачи (1.10') и (1.11) окончательно будет иметь следующий вид:

$$\vec{V}(y) = e^{yM} \cdot \mathcal{K}^{-1} \cdot \vec{\varphi} + \int_0^y e^{(y-s)M} \cdot \vec{F}(s) ds. \quad (2.6)$$

### 3. Нахождение приближенного решения краевой задачи (1.17') и (1.18) с помощью техники сплайн-функций

Учитывая трудности, возникающие при практическом использовании формулы (2.6) для нахождения приближенного решения краевой задачи (1.17'), (1.18), мы предложим следующую технологию построения ее приближенного решения. Будем искать приближенное решение в виде *интерполяционного кубического сплайна* класса  $C^2$  [7]:

$$\mathbf{S}(y) = (1 - \tau)\Phi_k + \tau\Phi_{k+1} - \frac{h_y^2}{6}\tau(1 - \tau)[(2 - \tau)\vec{m}_k + (1 + \tau)\vec{m}_{k+1}], \quad (3.1)$$

где  $\tau = \frac{y - y_k}{h_y}$ ,  $y \in [y_k, y_{k+1}]$ ,  $y_k = kh_y$ ,  $k = \overline{0, K - 1}$ ,  $Kh_y = \frac{\pi}{3}$ ;  $\Phi_k = \Phi(y_k)$ ;  $\vec{m}_k = \Phi''(y_k)$ .

Кубический сплайн (3.1) должен быть непрерывным вместе со своей первой производной всюду на отрезке  $[0, \pi/3]$  (вторая производная непрерывна по определению сплайна (3.1)). Вычисляя векторы

$$\vec{S}'(y_k + 0), \vec{S}'(y_k - 0)$$

и приравнивая их, получим

$$\frac{1}{2}\vec{m}_{k-1} + 2\vec{m}_k + \frac{1}{2}\vec{m}_{k+1} = \frac{3}{h_y^2}(\eta\Phi_k - \bar{\eta}\Phi_k), \quad k = \overline{1, K - 1}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\eta = \psi - 1$ ,  $\bar{\eta} = 1 - \psi^{-1}$  — разностные операторы;  $\psi$ ,  $\psi^{-1}$  — операторы сдвига:  $\psi^{\pm 1}\Phi_k = \Phi_{k\pm 1}$ ,  $\psi^{\pm 1} = \psi$ .

Полагая в (1.17')  $y = y_k$  и подставляя  $\Phi''(y_k)$  (см. уравнение (1.17')) в (3.2), получим следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} \left\{ I_N - \frac{h_y^2}{6}\mathcal{B} \right\} \Phi_{k-1} - 2 \left\{ I_N + \frac{h_y^2}{3}\mathcal{B} \right\} \Phi_k + \left\{ I_N - \frac{h_y^2}{6}\mathcal{B} \right\} \Phi_{k+1} = \\ = \frac{h_y^2}{6} \{ \vec{\mathcal{F}}_{k-1} + 4\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{\mathcal{F}}_{k+1} \}, \quad k = \overline{1, K - 1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\vec{\mathcal{F}}_k = \vec{\mathcal{F}}(y_k)$ .

Для нахождения сеточной вектор-функции  $\Phi_k$ ,  $k = \overline{0, K}$ , с помощью системы алгебраических уравнений (3.3) необходимо задать краевые условия при  $k = 0$  и  $k = K$ .

Аппроксимируя в краевых условиях (1.18) производную разностным отношением, в итоге получаем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_1, \\ \Phi_k &= \mathcal{L}\Phi_{k-1} + \vec{L}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Здесь  $\mathcal{L}$  — диагональная матрица порядка  $N$  (диагональные элементы равны либо нулю, либо 1);  $\vec{L}$  — вектор размерности  $N$  (компоненты вектора  $\vec{L}$  равны либо нулю, либо  $G$ , либо  $B$ ). Систему алгебраических уравнений (3.3) и (3.4) можно решить методом матричной прогонки [8]. Легко видеть, что из неравенства  $\mathcal{B} > 0$  следуют условия *хорошей обусловленности* разностной краевой задачи (3.3) и (3.4).

## Список литературы

- [1] ROMANO V. 2D simulation of a silicon MESFET with a non-parabolic hydrodynamical model based on the maximum entropy principle // J. Comput. Phys. 2002. Vol. 176. P. 70–92.
- [2] БЛОХИН А.М., БУШМАНОВ Р.С., РУДОМЕТОВА А.С., РОМАНО В. Linear asymptotic stability of the equilibrium state for the 2-D MEP hydrodynamical model of charge transport in semiconductors // Nonlinear Analysis. 2006. Vol. 65. P. 1018–1038.
- [3] БАБЕНКО К.И. Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
- [4] ЛАНКАСТЕР П. Теория матриц. М.: Наука, 1980.
- [5] ГОДУНОВ С.К. Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
- [6] БЛОХИН А.М. Элементы теории гиперболических систем и уравнений: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995.
- [7] ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [8] САМАРСКИЙ А.А., ПОПОВ Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 14 сентября 2006 г.