В О П Р О С Ы

по курсу лекций «Вычислительные методы анализа и линейной алгебры»
(3 семестр обучения ММФ НГУ, II поток, лектор С.П. Шарый)

1. Задачи интерполирования и приближения функций. Алгебраическая интерполяция. Существование и единственность решения задачи алгебраической интерполяции. Интерполяционный полином Лагранжа.
2. Разделённые разности и их свойства. Формула для прямого представления разделённых разностей. Интерполяционный полином Ньютона, его вывод.
3. Оценка погрешности алгебраической интерполяции с простыми узлами. Связь разделённых разностей функции с её производными.
4. Полиномы Чебышёва, их различные представления. Свойства полиномов Чебышёва. Применение полиномов Чебышёва в интерполировании.
5. Задача алгебраической интерполяции с кратными узлами и задача эрмитовой интерполяции. Существование и единственность решения задачи эрмитовой интерполяции. Оценка погрешности эрмитовой интерполяции.
6. Понятия интерполяционного процесса и его сходимости. Примеры Бернштейна и Рунге. Теорема Фабера и теорема Марцинкевича, их значение для теории интерполяции. Условия сходимости интерполяционных процессов по чебышёвским узлам.
7. Понятие о сплайне, мотивации конструкции сплайна. Степень сплайна, его дефект. Интерполяционный кубический сплайн (без построения), точность приближения им функции и её производных. Естественные кубические сплайны и их экстремальное свойство. Теорема Холладея.
8. Интерполяционные кубические сплайны и их построение.
9. Задача приближения функций и её формы. Существование и единственность наилучшего приближения в нормированных пространствах. Теорема Э. Бореля.
10. Среднеквадратичное приближение. Наилучшее приближение в евклидовом пространстве и его построение. Метод наименьших квадратов. Выбор базисных функций в методе наименьших квадратов.
11. Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений. Метод наименьших квадратов для нахождения псевдорешений систем линейных уравнений. Трансформация Гаусса и нормальная система уравнений. Разрешимость нормальной системы уравнений.

12. Полиномы Лежандра, их свойства. Формула Родрига. Применение полиномов Лежандра в задачах приближения.

13. Задача численного интегрирования. Квадратурные формулы и их остаточные члены. Интерполяционные квадратурные формулы, формулы Ньютона-Котеса. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций, оценка их погрешности. Необходимое и достаточное условие принадлежности квадратурной формулы к интерполяционным.

14. Квадратурная формула Симпсона (парабол), оценка её погрешности. Лемма Кеплера. Составные квадратурные формулы, их погрешность. Простейшие составные квадратурные формулы и оценки их погрешности.

15. Алгебраическая степень точности квадратурных формул. Задача оптимизации квадратур и формулы Гаусса. Простейшие квадратуры Гаусса.

16. Выбор узлов для квадратурных формул Гаусса в общем случае. Построение квадратурных формул Гаусса. Погрешность квадратур Гаусса.

17. Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы. Сингулярное разложение матрицы, его применение. Спектральный радиус и его свойства, взаимоотношение с матричными нормами. Связь спектрального радиуса матрицы и асимптотического поведения её степеней.

18. Нормы в пространствах векторов и матриц, их применение. Топологическая структура в арифметических векторных пространствах. Эквивалентность норм. Согласованные и подчинённые матричные нормы, их существование и примеры. Подчинённые матричные нормы для популярных векторных норм. Матричный ряд Неймана.

19. Понятие об обусловленности математической задачи. Число обусловленности матрицы, его оценивание. Оценки погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений через погрешности входных данных. Примеры хорошо обусловленных и плохо обусловленных матриц.

20. Матрицы с диагональным преобладанием. Признак Адамара неособенности матриц. Круги Гершгорина. Теорема Гершгорина. Теорема Алберга-Нильсона.

21. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений, его матричная интерпретация. Различные способы выбора ведущего элемента. Выполнимость метода Гаусса с выбором ведущего элемента.

22. LU-разложение матрицы, его связь с методом Гаусса для решения систем линейных уравнений. Условия существования LU-разложения матриц. Ме-

тод Дулитла. Строго регулярные матрицы. Выполнимость метода Гаусса для систем линейных уравнений со строго регулярными матрицами.

23. Разложение Холесского для матриц, его существование и единственность.

24. Метод Холесского (квадратного корня) для решения систем линейных алгебраических уравнений.

25. Поведение числа обусловленности при матричных преобразованиях. Мотивации применения ортогональных преобразований в вычислительной линейной алгебре. QR-разложение матриц, его использование для решения линейной задачи наименьших квадратов.

26. Ортогональные матрицы отражения (матрицы Хаусхолдера), их свойства и применение.

27. Метод Хаусхолдера (отражений) для решения систем линейных уравнений. Ортогональные матрицы вращений (матрицы Гивенса), их применение. Метод вращений для решения систем линейных уравнений.

28. Метод прогонки для решения трёхдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. Достаточные условия выполнимости метода прогонки.

29. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов. Доказательство необходимости.

30. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов. Доказательство достаточности.

31. Способы подготовки системы линейных алгебраических уравнений к итерационному решению. Предобуславливание. Расщепление матрицы системы. Метод Ричардсона и оптимизация простейшего скалярного предобуславливателя.

32. Итерационный метод Якоби, условия его сходимости. Сходимость метода Якоби для систем линейных уравнений, матрицы которых имеют диагональное преобладание.

33. Итерационный метод Гаусса-Зейделя, его матричное представление. Сходимость метода Гаусса-Зейделя для линейных систем, матрицы которых имеют диагональное преобладание. Другие достаточные условия сходимости.

34. Итерационный метод релаксации для решения линейных систем уравнений. Лемма Кэхэна и необходимое условие его сходимости. Достаточные условия сходимости. Теорема Островского-Райха.

35. Нестационарные итерационные методы для решения систем линейных уравнений, различные подходы к их построению. Вариационные итерационные методы. Энергетическая норма и функционал энергии, их свойства. Взаимоотношение задачи минимизации функционала энергии и решения системы линейных уравнений.

36. Метод наискорейшего градиентного спуска для решения систем линейных алгебраических уравнений. Оценка его скорости сходимости.

37. Метод сопряжённых градиентов для линейных систем с симметричными положительно определёнными матрицами. Свойства последовательных шагов метода сопряжённых градиентов, конечная сходимость. Общая оценка скорости сходимости.

38. Оценка погрешности приближённого решения системы линейных алгебраических уравнений. Оценивание нормы обратной матрицы. Оценка погрешности стационарного одношагового итерационного метода через последовательные итерации.

Литература

[1] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* – Москва: Бином, 2003, а также другие издания этой книги.

[2] Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Т. 1–2.* – Москва: Наука, 1966.

[3] Вержбицкий В.М. *Численные методы. Части 1–2.* – Москва: «Оникс 21 век», 2005.

[5] Демидович Б.П., Марон А.А. *Основы вычислительной математики.* – Москва: Наука, 1970.

[6] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра.* – Москва: Мир, 2001.

[7] Коновалов А.Н. *Введение в вычислительные методы линейной алгебры.* – Новосибирск: Наука, 1993.

[8] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. *Вычислительные методы. Т. 1–2.* – Москва: Наука, 1976.

[9] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – Москва: Наука, 1989.

[10] Тыртышников Е.Е. *Методы численного анализа.* – Москва: Академия, 2007.

[11] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* – Москва–Ленинград: Физматлит, 1963.

[12] Шарый С.П. *Курс вычислительных методов.* – М.–Ижевск: Издательство «ИКИ», 2025. (см. также электронную версию на `http://www.ict.nsc.ru/matmod/index.php?file=u_posobiya`)