

На правах рукописи



**Марков Сергей Игоревич**

**ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ И НЕКОНФОРМНЫХ  
МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ДЛЯ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА  
ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН) и в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» (НГТУ)

Научный  
руководитель: доктор технических наук, профессор  
**Шурина Элла Петровна**

Официальные  
оппоненты: **Лаевский Юрий Миронович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск,  
главный научный сотрудник

**Лапин Василий Николаевич**,  
кандидат физико-математических наук,  
ИВТ СО РАН, г. Новосибирск,  
старший научный сотрудник

Ведущая  
организация: Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук», г. Москва

Защита состоится 27.06.2019 г. в 11:30 на заседании диссертационного совета Д 999.141.03 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» по адресу 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук  
<http://www.ict.nsc.ru/ru/structure/discouncil/markov-si>

Автореферат разослан 19 апреля 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук, доцент



Лебедев А.С.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** Одним из источников информации о транспортно-фильтрационных свойствах породы-коллектора при извлечении нефти является компьютерная обработка результатов исследования кернов. Естественная многомасштабность геологической среды ограничивает возможность применения методов прямого математического моделирования процесса фильтрации флюидов, поэтому необходима процедура укрупнения масштаба. Возникают две основные задачи, которые в настоящее время не имеют решения в общем случае. Первая задача связана с построением и дискретизацией математических моделей, которые устанавливают связь физических моделей процесса фильтрации на разных уровнях иерархии многомасштабной гетерогенной среды. Вторая задача связана с определением допустимых границ применимости изотропной и анизотропной моделей проницаемости пласта. Поэтому актуальной проблемой является разработка эффективных вычислительных схем для моделирования процесса фильтрации флюидов на разных уровнях иерархии многомасштабной гетерогенной среды и алгоритма вычисления тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора с анизотропными физическими свойствами.

**Объект исследования** – процесс фильтрации флюидов в геологической многомасштабной среде с анизотропной природой проницаемости.

**Предмет исследования** – вычислительные схемы для решения задачи фильтрации флюида в многомасштабной геологической среде, алгоритм вычисления тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора.

**Цель работы** – исследование процесса фильтрации несжимаемой жидкости в многомасштабных гетерогенных средах на базе вычислительных схем метода конечных элементов для трёхмерного математического моделирования.

### **Задачи исследования:**

1. Разработка и реализация программного комплекса для моделирования процесса течения однофазной несжимаемой жидкости в каверне (канале) с последующим просачиванием в пористую среду.
2. Разработка алгоритма оценки тензора абсолютной проницаемости трёхмерной гетерогенной среды.

**Методы исследования.** Анализ литературы, посвящённой решению задач фильтрации. Конформный стабилизированный метод конечных элементов и неконформный разрывный метод Галёркина для решения краевых задач. Сравнительный анализ полученных результатов с данными физического эксперимента.

### **Защищаемые научные результаты:**

1. Вариационные формулировки стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для моделирования процесса фильтрации несжимаемой жидкости в многомасштабной гетерогенной среде.
2. Алгоритм вычисления тензора абсолютной проницаемости.
3. Результаты математического моделирования процесса фильтрации несжимаемой жидкости в гетерогенной среде: установлено существование порога объёмной пористости гетерогенной среды, при котором возможен переход от анизотропной модели абсолютной проницаемости к изотропной.

**Научная новизна.** Впервые предложена и реализована полу неявная вычислительная схема на базе разрывного метода Галёркина для математического моделирования процесса течения флюида в многомасштабной геологической среде. Разработана и реализована вычислительная схема на базе разрывного метода Галёркина в трёхмерной постановке для математического моделирования процесса просачивания флюида в многомасштабной пористой среде. Разработан и реализован алгоритм вычисления тензора абсолютной проницаемости второго ранга породы-коллектора на базе метода давления, установлен допустимый порог зашумления измеряемых данных для корректного решения обратной задачи.

**Значимость работы.** Разработанный программный комплекс может быть использован для численного моделирования процесса фильтрации несжимаемой жидкости в многомасштабной геологической среде при проведении гидравлического разрыва пласта и исследовании транспортно-фильтрационных свойств породы-коллектора. Установлены границы применимости анизотропной и изотропной моделей проницаемости для слоистых и пористых сред. Разработанное программно-математическое обеспечение может быть использовано для проведения исследований недр и природных ресурсов.

Результаты исследования внедрены в проекты ОФИ-М “Многомасштабное, многофизичное моделирование естественных и искусственных электромагнитных полей в задачах наземной и морской геоэлектрики (№ 13-05-12031)”, “Разработка программного комплекса для реализации на современных высокопроизводительных кластерах алгоритмов численного моделирования физических процессов в нефтегазоносных пластах, а именно: гидродинамики в пористых трещиноватых средах; идентификация трещин в гетерогенном флюидонасыщенном межскважинном пространстве электромагнитными методами (№ 16-29-15094)”.

**Личный вклад.** Марков С.И. принимал участие в работах на всех этапах подготовки кандидатской диссертации: разработка и верификация вариационных формулировок стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для моделирования процесса фильтрации в многомасштабной геологической среде, разработка и верификация алгоритма вычисления тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора, реализация программного комплекса на языке C++ и C#, планирование и проведение вычислительных экспериментов, анализ и интерпретация полученных результатов.

**Представление работы.** Результаты исследования докладывались на следующих конференциях: Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики”, посвященная памяти К. И. Бабенко, п. Абрау-Дюрсо, 2016, 2018; Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, п. Абрау-Дюрсо, 2016, 2018; Международная конференция, посвящённая 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН “Математика в современном мире”, г. Новосибирск, 2017; X Всероссийская научная конференция с международным участием “Математическое моделирование и краевые задачи”, г. Самара, 2017; Международная конференция “Марчуковские научные чтения”, г. Новосибирск, 2016, 2018.

**Обоснованность и достоверность результатов** подтверждена вычислительными экспериментами при решении задач, приближенных к реальным и имеющих аналитическое решение, при сравнении с данными физических экспериментов.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Содержание диссертации отвечает следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

- Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.
- Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.
- Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Публикации.** Опубликовано 35 печатных работ: 3 статьи в научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК [1, 2, 3]; 6 статей в журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus [1, 3, 4, 5, 6, 7]; 28 публикаций в материалах международных и российских конференций; получены два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ (№№ 2017662475, 2018613316).

**Награды и достижения.** Стипендия Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам, осуществляющим перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики, на 2016-2018 годы (приказ № 375, СП-3627.2016.5).

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы (238 наименований) и двух приложений. Работа изложена на 165 страницах и включает 67 рисунков, 38 таблиц.

## **СОДЕРЖАНИЕ КАНДИДАТСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ**

**В первой главе** приведён обзор основных математических моделей процесса фильтрации несжимаемого флюида на разных уровнях иерархии многомасштабной геологической среды; обзор явных и неявных методов вычисления тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора и методов дискретизации моделей фильтрации.

Математическое моделирование используется для исследования процесса фильтрации несжимаемых жидкостей в гетерогенных нефтенасыщенных геологических средах. Математическая модель – система дифференциальных уравнений в частных производных с заданными начальными и краевыми условиями.

Для задачи фильтрации флюида в пористых и трещиновато-пористых средах выделяют два уровня иерархии: мезоскопический и макроскопический [Steinhauser M.O., 2017]. Процесс перехода от мелкомасштабной модели среды к крупномасштабной называется *upscaling*. Применение технологии *upscaling* позволяет перейти от геологической модели породы-резервуара к гидродинамической модели.

Задача определения физических свойств гетерогенной среды, которые характеризуют макроскопическое поведение фильтрационной системы, может быть решена с использованием методов *гомогенизации*. Методы гомогенизации базируются на *теории эффективной среды* [E W., 2011].

Геологическая среда является анизотропной, поскольку её физические свойства могут существенно различаться в координатных направлениях. Абсолютная проницаемость геологической среды является тензором.

Алгоритм вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости основан на решении обратной коэффициентной задачи и методе давления.

Метод давления применяется при математическом моделировании процесса фильтрации в гетерогенных средах и является наиболее информативным, поскольку позволяет учесть структуру геологической среды.

Задача однофазной фильтрации решается на мезомасштабном уровне с учётом всей неоднородности среды. Затем при тех же начальных и граничных условиях вычисляются такие параметры макромасштабной модели, при которых могут быть получены те же потоки и давление флюида, что и для мезомасштабной модели.

Существование решения обратной задачи зависит от свойств оператора прямой задачи, которые определяются методом дискретизации математической модели процесса фильтрации [Тихонов А.Н., 1979]. Для дискретизации сингулярно-возмущённых задач применяются вычислительные схемы стабилизированных конформных и неконформных конечноэлементных методов.

**Во второй главе** приводится сравнительный анализ и верификация вариационных формулировок конформных и неконформных методов конечных элементов для решения задачи фильтрации флюида в многомасштабной геологической среде в разных функциональных пространствах.

Пусть  $\Omega \in R^3$  – трёхмерная область с Липшиц-непрерывной границей  $\partial\Omega$ . Введём в  $\Omega \in R^3$  следующие гильбертовы пространства

$$L^2(\Omega) = \left\{ \psi \mid \int_{\Omega} |\psi|^2 d\Omega < +\infty \right\}, \quad (1)$$

$$H^m(\Omega) = \left\{ \psi \mid D^{\alpha} \psi \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \left\{ \boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3, \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3, \nabla \times \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\} \quad (4)$$

с соответствующими нормами

$$\|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\omega, \omega)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\omega|^2 d\Omega, \quad \forall \omega \in L^2(\Omega), \quad (5)$$

$$\|\omega\|_{H^m(\Omega)}^2 = (\omega, \omega)_{H^m(\Omega)} = \sum_{k \leq m} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^{\alpha} \omega|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \omega \in H^m(\Omega), \quad (6)$$

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}^2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \quad (7)$$

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl},\Omega)}^2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)} + (\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \nabla \times \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)}, \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl},\Omega). \quad (8)$$

При построении вычислительных схем МКЭ в векторных пространствах (2) – (4) используется комплекс De Rham

$$R^1 \xrightarrow{\text{id}} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathbf{H}(\mathbf{curl},\Omega) \xrightarrow{\nabla \times} \mathbf{H}(\mathbf{div},\Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (9)$$

Свойство конформности в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$  означает, что функция имеет непрерывный след на межэлементной границе. Для пространств  $\mathbf{H}(\mathbf{div},\Omega)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{curl},\Omega)$  свойство конформности – непрерывность следа нормальной и тангенциальной компоненты векторной функции, соответственно. В пространстве  $L^2(\Omega)$  свойство конформности не существует.

Рассмотрим в области  $\Omega \in R^3$  разбиение  $\Xi_h(\Omega)$  на непересекающиеся открытые множества  $\Omega_k$  такие, что  $\bigcup_{\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)} \overline{\Omega_k} = \overline{\Omega}$ . Обозначим  $\Gamma = \bigcup_k \partial\Omega_k$  множество

всех границ,  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$  – множество внутренних границ и пространство следов  $T(\Gamma) = \prod_{\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)} L^2(\partial\Omega_k)$ . Введём на множестве  $\Xi_h(\Omega)$  конечномерные подпространства  $P^h \subset L^2(\Omega)$ ,  $W^h \subset H^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{H}(\mathbf{div},\Omega)$

$$P^h = \{q | q \in L^2(\Omega) : q \in P_p(K) \forall K \in \Xi_h(\Omega)\}, \quad (10)$$

$$W^h = \{w | w \in H^1(\Omega) : w \in P_p(K) \forall K \in \Xi_h(\Omega)\}, \quad (11)$$

$$\mathbf{V}^h = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{div},\Omega) : \mathbf{w} \in [P_p(K)]^3 \forall K \in \Xi_h(\Omega)\}, \quad (12)$$

где  $P_p(K)$  – локальное пространство полиномов степени не больше  $p$ , и принадлежащие им конечноэлементные интерполянты  $p^h \in P^h$ ,  $\rho^h \in W^h$ ,  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$

$$p^h = \sum_{i=0}^m b_i q_i, \quad q_i \in P^h, \quad \rho^h = \sum_{i=0}^m c_i w_i, \quad w_i \in W^h, \quad \mathbf{v}^h = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{w}_i \in \mathbf{V}^h. \quad (13)$$

Для построения операторов следа на межэлементной границе (в литературе *numerical fluxes* – “численные потоки”) вводятся оператор среднего  $\{\cdot\}$  и скачка  $[\cdot]$

$$\{\cdot\} : [T(\Gamma)]^{3 \times 3} \rightarrow [L^2(\Gamma)]^{3 \times 3}, \quad [\cdot] : [T(\Gamma)]^{3 \times 3} \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3, \quad \underline{[\cdot]} : [T(\Gamma)]^3 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^{3 \times 3}, \quad (14)$$

$$\{\cdot\} : [T(\Gamma)]^3 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3, \quad [\cdot] : [T(\Gamma)]^3 \rightarrow L^2(\Gamma), \quad \{\cdot\} : T(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \quad [\cdot] : T(\Gamma) \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3,$$

Для функций  $\boldsymbol{\tau} \in [T(\Gamma)]^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{v} \in [T(\Gamma)]^3$  и  $p \in T(\Gamma)$  на внешней границе  $\partial\Omega$

$$[\boldsymbol{\tau}]_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}, \quad \{\boldsymbol{\tau}\}_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\tau}, \quad [\underline{\mathbf{v}}]_{\partial\Omega} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}, \quad [\mathbf{v}]_{\partial\Omega} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \{\mathbf{v}\}_{\partial\Omega} = \mathbf{v}, \quad [p]_{\partial\Omega} = p\mathbf{n}, \quad \{p\}_{\partial\Omega} = p, \quad (15)$$

на внутренней границе  $\Gamma_0 = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_n$  между элементами  $\Omega_k$  и  $\Omega_n$

$$[\boldsymbol{\tau}]_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n}_n, \quad \{\boldsymbol{\tau}\}_{\Gamma_0} = (\boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\tau}_n) / 2, \quad [\underline{\mathbf{v}}]_{\Gamma_0} = \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{n}_k + \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{n}_n, \quad (16)$$

$$[\mathbf{v}]_{\Gamma_0} = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{n}_n, \quad \{\mathbf{v}\}_{\Gamma_0} = (\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_n) / 2, \quad [p]_{\Gamma_0} = p_k \mathbf{n}_k + p_n \mathbf{n}_n, \quad \{p\}_{\Gamma_0} = (p_k + p_n) / 2,$$

где нижний индекс показывает принадлежность к  $\Omega_i$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль.

Пусть процесс течения вязкой несжимаемой жидкости протекает в каверне  $\Omega \in R^3$  с границей  $\partial\Omega$ . Обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы втекания и вытекания, соответственно. Через границу каверны и пор  $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  жидкость не протекает. Жидкость в начальный момент времени находится в состоянии покоя.

Математическая модель описывается системой уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в поле силы тяжести

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) + \rho \mathbf{g} \text{ в } \Omega, \quad (17)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (18)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_D \text{ на } \partial\Omega, \quad (19)$$

где  $\rho$  – плотность флюида ( $\text{кг/м}^3$ ),  $\mathbf{v}$  – скорость течения флюида ( $\text{м/с}$ ),  $p$  – динамическое давление ( $\text{Па}$ ),  $\mu$  – динамическая вязкость флюида ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ ),  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения ( $\text{м/с}^2$ ),  $\mathbf{v}_D$  – функция, удовлетворяющая неоднородному условию Дирихле и принимающая нулевое значение в области  $\Omega$ .

Для единственного решения задачи (17) – (19) требуется выполнение условия для давления [Ладыженская О.А., 1970]

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0. \quad (20)$$

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

На границе каверны и пор, через которую не протекает жидкость, условия для вектора скорости формулируются как

$$\mathbf{v}|_{S_1} = \mathbf{0}, \quad (22)$$

$S_1 = \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  – граница непротекания.

На границе втекания  $\Gamma_1$  задан вектор скорости течения

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}_1, \quad (23)$$

на границе вытекания  $\Gamma_2$  заданы однородные условия для нормальной компоненты тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \left( \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) - p \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений [ $\text{Па}$ ],  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали.

Существование и единственность слабого решения системы уравнений (17) – (18) с краевыми условиями (22) – (24) обеспечивается корректным выбором функциональных пространств, которые должны удовлетворять условию Ладыженской-Бабушки-Брецци [J. Donea, 2003], [J. Volker, 2016].

Введём следующее обозначение для невязки уравнения движения

$$R(\mathbf{v}^h) = \rho \left( \mathbf{v}_t^h + (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h \right) - \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v}^h + \nabla^T \mathbf{v}^h \right) + \nabla p^h - \rho \mathbf{g}, \quad (25)$$

тогда стабилизированная вариационная формулировка для системы уравнений Навье-Стокса имеет вид: найти  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$  и  $q^h \in P^h$



$$\begin{aligned}
& a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{w}^h, p^h) - b(\mathbf{v}^h, q^h) + \\
& + d(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, R(\mathbf{v}^h)) + p(q^h, R(\mathbf{v}^h)) + s(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_\Omega + (\mathbf{w}^h, \mathbf{t}^h)_{\Gamma_2}, \\
& a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{v}_t^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \mu (\nabla \mathbf{v}^h + \nabla^T \mathbf{v}^h) : \nabla \mathbf{w}^h d\Omega_K, \\
& c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K, \quad b(\mathbf{w}^h, p^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \mathbf{w}^h p^h d\Omega_K, \\
& d(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, R(\mathbf{v}^h)) = \sum_K \int_{\Omega_K} \tau_{\text{SUPG}} \mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h \cdot R(\mathbf{v}^h) d\Omega_K, \\
& p(q^h, R(\mathbf{v}^h)) = \sum_K \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_K} \tau_{\text{PSPG}} \nabla q^h \cdot R(\mathbf{v}^h) d\Omega_K, \quad s(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \tau_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}^h \nabla \cdot \mathbf{v}^h d\Omega_K, \\
& (\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_\Omega = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K, \quad (\mathbf{w}^h, \mathbf{t}^h)_{\Gamma_2} = \sum_{\Gamma_K \in \Gamma_2} \int_{\Gamma_K} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^h dS,
\end{aligned}$$

Где  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$ ,  $\tau_{\text{LSIC}}$  – параметры стабилизации.

IP-DG-формулировка разрывного метода Галёркина для системы уравнений Навье-Стокса: найти  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$  и  $q^h \in P^h$

$$\begin{aligned}
& a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{w}^h, p^h) = (\mathbf{w}^h, \mathbf{F}), \\
& -b(\mathbf{v}^h, q^h) + d(q^h, p^h) = 0, \\
& a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{v}_t^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \mu (\nabla \mathbf{v}^h + \nabla^T \mathbf{v}^h) : \nabla \mathbf{w}^h d\Omega_K - \\
& - \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \left\{ \mu (\nabla \mathbf{v}^h + (\nabla \mathbf{v}^h)^T) \right\} : [\underline{\mathbf{w}^h}] + \left\{ \mu (\nabla \mathbf{w}^h + (\nabla \mathbf{w}^h)^T) \right\} : [\underline{\mathbf{v}^h}] - \tau^{DG} [\underline{\mathbf{v}^h}] : [\underline{\mathbf{w}^h}] dS, \\
& c(\mathbf{a}; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \nabla \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \rho ([\underline{\mathbf{w}^h}] \cdot \mathbf{a}) \cdot ([\underline{\mathbf{v}^h}] \cdot \mathbf{n}) dS, \\
& b(\mathbf{v}^h, q^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \mathbf{v}^h q^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \{q^h\} [\underline{\mathbf{v}^h}] dS, \\
& (\mathbf{w}^h, \mathbf{F}) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K + \sum_{\partial\Omega_M \in \Gamma_2} \int_{\partial\Omega_M} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^h dS + \sum_{\partial\Omega_N \in \Gamma_1} \int_{\partial\Omega_N} \mu (\nabla \mathbf{w}^h + \nabla^T \mathbf{w}^h) : (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) - \\
& - \tau^{DG} (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) : (\mathbf{w}^h \otimes \mathbf{n}) - \rho (\mathbf{w}^h \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_D dS, \\
& d(q^h, p^h) = \sum_K \tau^{DG} \int_{\partial\Omega_K} [q^h] \cdot [p^h], \quad \partial\Omega_K \in \Gamma_0.
\end{aligned}$$

Установлено, что параметр стабилизации можно выбрать в виде  $\tau^{DG} = \text{Re}$ .

Для дискретизации системы уравнений Навье-Стокса по времени используется полунявный проекционный метод Chorin-Темат на базе физического расщепления:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nabla p$ , где  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ ,  $p \in H^1(\Omega)$

---

#### Алгоритм 1 – Метод Chorin-Темат (физическое расщепление)

---

- 1:  $\mathbf{v}^0$  – начальное условие для скорости;
- 2: **for**  $k := 0, 1, 2, 3 \dots$  **do**

$$3: \quad \text{найти } \mathbf{v}_0^{k+1} \text{ из } \begin{cases} \rho \frac{\mathbf{v}_0^{k+1} - \mathbf{v}^k}{\Delta t} + \rho(\mathbf{v}^k \cdot \nabla) \mathbf{v}_0^{k+1} = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v}_0^{k+1} + (\nabla \mathbf{v}_0^{k+1})^T \right) + \rho \mathbf{g}, \\ \mathbf{v}_0^{k+1} \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_g, \end{cases}$$

$$4: \quad \text{найти } \mathbf{v}^{k+1} \text{ и } p^{k+1} \text{ из } \begin{cases} \rho \frac{\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}_0^{k+1}}{\Delta t} + \nabla p^{k+1} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_g, \end{cases}$$

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathfrak{R} \mathbf{v}_0^{k+1}, \quad \Delta t \nabla p^{k+1} = (\mathbf{I} - \mathfrak{R}) \mathbf{v}_0^{k+1}, \quad \text{где } \mathfrak{R} \text{ – ортогональный проекционный оператор,}$$

5: **end for.**

Пусть  $\mathbf{M}$  – матрица массы,  $\mathbf{P}$  – блок, отвечающий за дивергентное ограничение, тогда

$$(\mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}) p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}^T \mathbf{v}_0^{k+1}, \quad \mathbf{M} \mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{v}_0^{k+1} - \Delta t \mathbf{P} p^{k+1}. \quad (26)$$

Процедура обращения матрицы массы  $\mathbf{M}$  не является ресурсозатратной, поскольку базис пространства  $\mathbf{H}(\text{div})$  может быть построен при использовании полиномов Лежандра, которые обеспечивают диагональный вид матрицы массы.

Условие устойчивости явных методов определяется неравенством

$$\Delta t \leq C d^k, \quad (27)$$

где  $C$  – const,  $d$  – размер конечного элемента,  $k$  – порядок базисных функций для вектора скорости.

Пусть процесс неустановившейся фильтрации жидкости протекает в пористой среде  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , с границей втекания  $\Gamma_1$ , границей вытекания  $\Gamma_2$  и непроницаемой границей  $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ . Для пористых сред уравнение неразрывности имеет модифицированную форму

$$\frac{\partial \phi \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (28)$$

где  $\phi$  – пористость,  $\rho$  – плотность флюида (кг/м<sup>3</sup>).

Уравнение движения в поле силы тяжести описывается законом Дарси

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\rho \mathbf{g} - \nabla p) \text{ в } \Omega, \quad (29)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость фильтрации (м/с),  $\mu$  – динамическая вязкость (Па·с),  $\mathbf{K}$  – тензор проницаемости (м<sup>2</sup>),  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>),  $p$  – давление (Па).

Предполагается, что пористость среды и вязкость флюида не зависят от давления. Для слабосжимаемого флюида в модель фильтрации добавляется уравнение состояния, которое связывает плотность с давлением,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = C_f, \quad (30)$$

где  $C_f$  – изотермическая сжимаемость флюида (Па<sup>-1</sup>).

Модель однофазной фильтрации относительно плотности

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho \right) + 2\rho \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ в } \Omega, \quad (31)$$

модель однофазной фильтрации относительно давления

$$\varphi \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p \right) + 2\rho_0 (1 + C_f p) \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla p = 0 \text{ в } \Omega. \quad (32)$$

Начальные условиями для давления и плотности

$$p|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0. \quad (33)$$

На границе  $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  краевые условия формулируются в виде

$$p|_{\Gamma_D} = p_D, \quad \rho|_{\Gamma_D} = \rho_0 (1 + C_f p|_{\Gamma_D}), \quad (34)$$

где  $p_D$  – величина давления на  $\Gamma_D$ .

На непроницаемой границе  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = - \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p \Big|_{\Gamma_N} = - \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho \Big|_{\Gamma_N} = 0. \quad (35)$$

Вариационные формулировки для задач фильтрации с уравнениями (31) и (32) будут различаться только множителем при конвективном слагаемом. NIPG-формулировка разрывного метода Галёркина для уравнения (31): найти  $\rho^h \in W^h \times [0, T]$ , что  $\forall w^h \in W^h$

$$a(w^h, \rho^h) + c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h) = (f^h, w^h), \quad (36)$$

$$a(w^h, \rho^h) = \sum_K \left( \int_{\Omega_K} \varphi \rho_t^h w^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho^h \cdot \nabla w^h d\Omega_K \right) + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \left( [\rho^h] \cdot \{ \nabla w^h \} - \{ \nabla \rho^h \} \cdot [w^h] + \gamma [\rho^h] \cdot [w^h] \right) dS, \quad (37)$$

$$c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} 2r \rho^h \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla w^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} 2r \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} [\rho^h] \cdot [w^h] dS, \quad (38)$$

$$(f^h, w^h) = \int_{\Gamma_D} \rho_D \left( - \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla w^h - \gamma w^h - 2r \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} w^h \right) dS, \quad (39)$$

где  $\rho_D$  – значение плотности на границе с условием Дирихле  $\Gamma_D$ ,  $\gamma > 1$  – параметр стабилизации.

Рассмотрим систему, состоящую из пористой среды  $\Omega_2$  и каверны  $\Omega_1$ , которая заполнена флюидом. Под действием внешнего давления флюид из каверны просачивается в окружающую пористую среду. Обозначим скорость и давление флюида в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  как  $(\mathbf{v}_1, p_1)$  и  $(\mathbf{v}_2, p_2)$ . Пусть  $\Gamma_{12}$  – граница пересечения областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Установившийся процесс просачивания несжимаемого флюида в поле силы тяжести описывается системой уравнений Навье-Стокса-Дарси

$$\rho(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) + \rho \mathbf{g} \text{ в } \Omega_1, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (40)$$

$$\mathbf{v}_2 = - \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p_2 - \rho \mathbf{g}) \text{ в } \Omega_2, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) = 0 \text{ в } \Omega_2, \quad (41)$$

где  $\rho$  – плотность флюида ( $\text{кг/м}^3$ ),  $\mu$  – динамическая вязкость флюида ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ ),  $\mathbf{K}$  – тензор проницаемости ( $\text{м}^2$ ).

На границе пористой среды  $\Omega_2$ , за исключением внутренней границы просачивания  $\Gamma_{12}$ , задаются однородные условия непротекания флюида

$$-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p_2 \Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{12}} = 0, \quad (42)$$

на границах втекания  $\Gamma_1$  и вытекания  $\Gamma_2$  каверны  $\Omega_1$ , за исключением границы просачивания  $\Gamma_{12}$ , задаются условия

$$\mathbf{v}_1 \Big|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}_D, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2} = \mathbf{0}, \quad (43)$$

для непроницаемой границы каверны условие для вектора скорости имеет вид

$$\mathbf{v}_1 \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}, \quad (44)$$

Введём обозначения  $\mathbf{n}_{12}$  и  $\boldsymbol{\tau}_{12}$  для внешних нормального и тангенциального вектора к границе  $\Gamma_{12}$ . Условия стыковки областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  формулируются как

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{\Gamma_{12}} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{\Gamma_{12}}, \quad p_1 \Big|_{\Gamma_{12}} - \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{\Gamma_{12}} = p_2 \Big|_{\Gamma_{12}}, \quad (45)$$

закон Бивера-Джозефа-Саффмана

$$\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_{12} \Big|_{\Gamma_{12}} = -m\mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_{12} \Big|_{\Gamma_{12}}, \quad (46)$$

где  $m > 0$  – коэффициент трения.

Вариационная формулировка на базе IP-DG-дискретизации: найти  $\mathbf{v}_1^h \in \mathbf{V}^h$ ,  $p_1^h \in P^h$ ,  $p_2^h \in P^h$ , что  $\forall \mathbf{w}_1^h \in \mathbf{V}^h$ ,  $q_1^h \in P^h$  и  $q_2^h \in P^h$

$$a_1(\mathbf{w}_1^h, \mathbf{v}_1^h) + b(\mathbf{w}_1^h, p_1^h) + \Lambda(\mathbf{w}_1^h, p_2^h) = (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{F}),$$

$$-b(\mathbf{v}_1^h, q_1^h) + d(q_1^h, p_1^h) = 0,$$

$$a_2(p_2^h, q_2^h) + \Lambda(\mathbf{v}_1^h, q_2^h) = 0,$$

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{w}_1^h, \mathbf{v}_1^h) &= \int_{\Omega} \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h \right) : \nabla \mathbf{w}_1^h d\Omega + \int_{\Gamma_{12}} \frac{\mu}{m} (\mathbf{v}_1^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) (\mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) dS - \\ &- \int_{\Gamma_0 \cup \partial\Omega} \left\{ \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1^h + (\nabla \mathbf{v}_1^h)^T \right) \right\} : \underline{[\mathbf{w}_1^h]} + \left\{ \mu \left( \nabla \mathbf{w}_1^h + (\nabla \mathbf{w}_1^h)^T \right) \right\} : \underline{[\mathbf{v}_1^h]} - \tau_1^{DG} \underline{[\mathbf{v}_1^h]} : \underline{[\mathbf{w}_1^h]} dS, \\ b(\mathbf{v}_1^h, q_1^h) &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}_1^h q_1^h d\Omega + \int_{\Gamma} \{q_1^h\} \underline{[\mathbf{v}_1^h]} dS, \quad \Lambda(\mathbf{w}_1^h, p_2^h) = \int_{\Gamma_{12}} p_2^h (\mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{n}_{12}) dS, \\ (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{F}) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}_1^h d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_1^h dS + \int_{\partial\Omega} \mu \left( \nabla \mathbf{w}_1^h + \nabla^T \mathbf{w}_1^h \right) : (\mathbf{u}_g \otimes \mathbf{n}) - \tau^{DG} (\mathbf{u}_g \otimes \mathbf{n}) : (\mathbf{w}_1^h \otimes \mathbf{n}) dS, \\ d(q_1^h, p_1^h) &= \tau^{DG} \int_{\Gamma_0} [q_1^h] \cdot [p_1^h], \quad a_2(p_2^h, q_2^h) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p_2^h \cdot \nabla q_2^h d\Omega + \int_{\Gamma_{12}} (\mathbf{v}_2^h \cdot \mathbf{n}_{12}) q_2^h dS - \\ &- \int_{\Gamma_0 \cup \partial\Omega} \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p_2^h \right\} \cdot [q_2^h] + \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla q_2^h \right\} : [p_2^h] - \tau_2^{DG} [p_2^h] \cdot [q_2^h] dS. \end{aligned}$$

Для определения эффективного тензора абсолютной проницаемости обратная коэффициентная задача формулируется в виде

$$\mathbf{A}\Theta = \mathbf{F}, \quad (47)$$

где  $\mathbf{A}: X \rightarrow Y$  – оператор обратной задачи,  $\Theta \in X$  – вектор неизвестных параметров,  $\mathbf{F} \in Y$  – модель наблюдения,  $X$  и  $Y$  – гильбертовы пространства.

Модель наблюдения может содержать погрешность измерений

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \xi, \quad (48)$$

где  $\mathbf{F}^*$  – истинные данные,  $\xi$  – шум с нормальным распределением.

Поскольку тензор абсолютной проницаемости является симметричным, то пространство неизвестных параметров состоит из 6 элементов и  $X = E^6$

$$\Theta = \{k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, k_{yy}, k_{yz}, k_{zz}\} \quad (49)$$

В общем случае задача (47) является некорректной. Получить приближённое решение задачи (47) можно путём минимизации сглаживающего функционала А.Н. Тихонова

$$J_\alpha(\Theta) = \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{F}\|^2 + \alpha\|\Theta\|^2 \quad (50)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации, который должен быть согласован с величиной ошибки  $\xi$ . Для вычисления параметра регуляризации используется метод квази-оптимального значения.

Минимизация функционала (50) эквивалента минимизации функционала

$$J_\alpha(\Theta) = \int_T \int_\Omega (F - F^*)^2 d\Omega dt + \alpha\|\Theta\|^2 \quad (51)$$

где  $F^*$  – модуль вектора скорости фильтрации в гетерогенной среде,  $F$  – модуль вектора скорости фильтрации в однородной среде для заданного набора параметров (49),  $\alpha$  – параметр регуляризации.

Для минимизации функционала (51) используется градиентный метод Флетчера-Ривса и локальный метод Ньютона для уточнения решения.

Были проведены исследования влияния величины возмущения неизвестных параметров на точность решения обратной коэффициентной задачи (ОКЗ). Установлен критический порог возмущения компонент тензора проницаемости до 10% и зашумления данных до 15%, при которых возможно релевантное решение ОКЗ.

Особый интерес для геологических приложений представляет слоистая среда с зонами, которые содержат целики – участки залежей с изолированными карманами неизвлечённой нефти. Такие объекты можно трактовать как включения с низкой проницаемостью, наличие которых приводит к снижению коэффициента отдачи нефти. Рассмотрим “слоистую” среду, изображённую на рисунке 1а. Объёмная концентрация целика – 54%. Ось цилиндра лежит между точками (0, 0, 0) и (0, 0, 5), радиус  $R = 1$  см. Одно из главных направлений напластования совпадает с осью Oz. Триангуляция неоднородной среды представлена на рисунке 1б. Целики заполнены нефтью с вязкостью  $\mu = 50$  мПа·с. К верхнему основанию керна прикладывается давление  $10^5$  Па, а к нижнему – 0 Па. Боковая поверхность свободная.

Процесс фильтрации длится 10 ч, шаг дискретизации по времени составляет 10 минут. Для решения СЛАУ используется комбинированный решатель на базе методов GMRES и BiCG с критерием останова по невязке  $10^{-8}$ .

Геологическая порода имеет микропористость  $\phi = 8\%$ . Просачивается вода с вязкостью  $1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ , плотностью  $1000 \text{ кг/м}^3$  и сжимаемостью  $4.6 \cdot 10^{10} \text{ Па}^{-1}$ . Исходная проницаемость матрицы среды составляет  $10^{-5} \text{ м}^2$ .

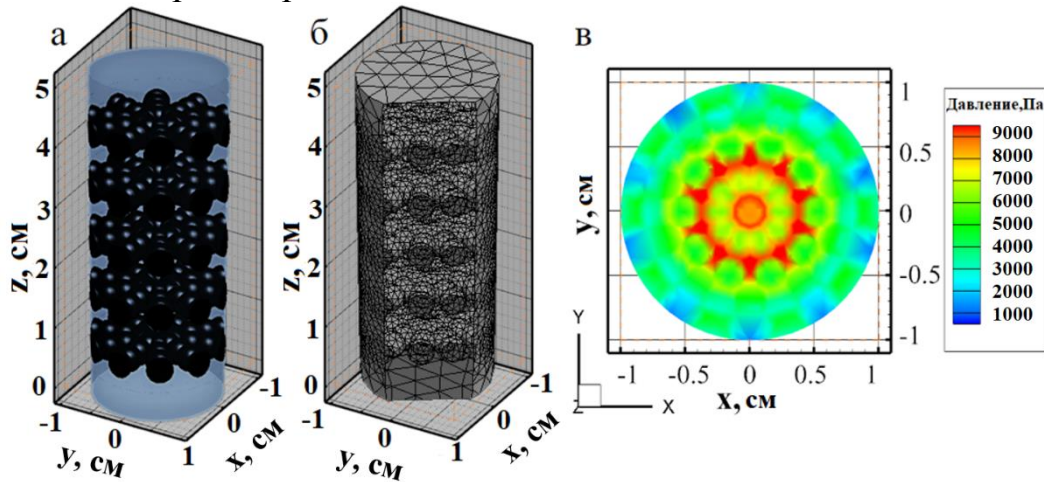


Рисунок 1 – Слоистая среда с 54% объёмной доли целика нефти (а); триангуляция (б): 54571 тетраэдр, 218284 степени свободы; распределение давления в сечении  $z = 4.5$  (в)

Процесс фильтрации воды в геологической среде описывается моделью однофазной фильтрации на основе закона Дарси, поведение нефти внутри пор описывается моделью Стокса. Распределение давления показано на рисунке 1в.

В таблице 1 представлены результаты решения обратной задачи.

Таблица 1 – Слоистая среда: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Тензор проницаемости, $\text{м}^2$	$\ F - F^*\  / \ F\  \cdot 100\%$
5	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4.62e-6 & 3.81e-6 & 4.73e-7 \\ 3.81e-6 & 5.13e-6 & 1.26e-7 \\ 4.73e-7 & 1.26e-7 & 8.23e-7 \end{pmatrix}$	2.31
10	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.91e-6 & 5.44e-6 & 2.11e-7 \\ 5.44e-6 & 8.78e-6 & 3.89e-7 \\ 2.11e-7 & 3.89e-7 & 7.19e-7 \end{pmatrix}$	3.91
15	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.36e-6 & 8.35e-6 & 2.99e-6 \\ 8.35e-6 & 1.36e-6 & 6.56e-6 \\ 2.99e-6 & 6.56e-6 & 6.23e-6 \end{pmatrix}$	11.71

Для слоистой среды с 54% объёмной концентрацией целиков нефти получены эффективные тензоры абсолютной проницаемости при уровнях зашумления 5% и 10% с относительной погрешностью 2.31% и 3.91%, соответственно. Одна из главных осей тензора совпадает с продольным направлением напластования вдоль оси Oz, что соответствует структуре неоднородной слоистой среды. Для уровня зашумления 15% не удалось восстановить локально-ортотропную структуру тензора, о чём говорит высокий уровень полученной погрешности в 11.71%.

Основная сложность, связанная с переходом от микро- к макромасштабной модели, заключается в выборе физической модели проницаемости, которая в зависимости от геометрии порового пространства может быть изотропной или анизотропной. Рассмотрим пористые среды, изображённые на рисунке 2. Ось цилиндра

лежит между точками  $(0, 0, 0)$  и  $(0, 0, 5)$ , радиус  $R = 1$  см. Концентрация макропор в первом керне 6%, во втором – 10%. Центры пор и радиусы пор внутри кернов сгенерированы случайным образом. Радиус пор варьируется от 0.1 мм до 1 мм.

Поры кернов заполнены нефтью с вязкостью  $\mu = 50$  мПа·с. К верхнему основанию кернов прикладывается давление  $10^5$  Па, к нижнему – 0 Па. Боковая поверхность свободная. Геологические породы имеют микропористость  $\phi = 8\%$ . Просачивается вода с вязкостью  $\mu = 1$  мПа·с, плотностью  $1000$  кг/м<sup>3</sup> и сжимаемостью  $C_f = 4.6 \cdot 10^{10}$  Па<sup>-1</sup>. Исходная проницаемость матрицы сред составляет  $10^{-5}$  м<sup>2</sup>. Процесс фильтрации длится 1 час, шаг дискретизации по времени составляет 1 минуту.

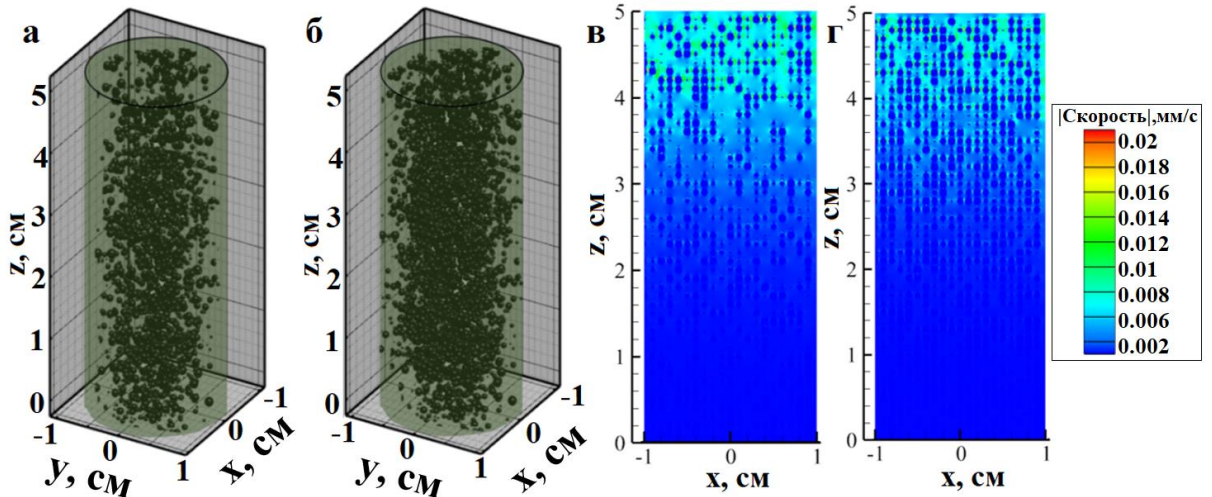


Рисунок 2 – Пористые среды с объёмной концентрацией пор 6% (а), 10% (б) и распределение модуля скорости флюида в сечении  $y = 0$  (в) и (г)

Процесс фильтрации воды внутри геологической среды описывается моделью однофазной фильтрации на основе закона Дарси, поведение нефти внутри пор описывается моделью Стокса. Результаты решения задачи фильтрации с учётом случайной пористости кернов показаны на рисунках 2в и 2г.

В таблицах 2 – 3 представлены результаты решения обратной коэффициентной задачи для разных уровней зашумления данных измерений модуля скорости фильтрации в гетерогенной среде, погрешность решения прямой задачи.

Таблица 2 – Среда с пористостью 6%: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Тензор проницаемости, м <sup>2</sup>	$\ F - F^*\  / \ F\  \cdot 100\%$
5	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.35e-6 & 4.56e-7 & 6.03e-7 \\ 4.56e-7 & 8.69e-6 & 4.99e-7 \\ 6.03e-7 & 4.99e-7 & 8.49e-6 \end{pmatrix}$	3.43
10	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.21e-6 & 3.82e-7 & 5.93e-7 \\ 3.82e-7 & 9.31e-6 & 5.41e-7 \\ 5.93e-7 & 5.41e-7 & 9.06e-6 \end{pmatrix}$	3.96
15	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 9.01e-6 & 3.79e-6 & 7.51e-6 \\ 3.79e-6 & 8.53e-6 & 5.17e-6 \\ 7.51e-6 & 5.17e-6 & 9.16e-6 \end{pmatrix}$	5.12

Таблица 3 – Среда с пористостью 10%: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Тензор проницаемости, м <sup>2</sup>	$\ F - F^*\  / \ F\  \cdot 100\%$
5	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.37e-6 & 4.56e-8 & 8.25e-8 \\ 4.56e-8 & 8.41e-6 & 1.72e-8 \\ 8.25e-8 & 1.72e-8 & 8.35e-6 \end{pmatrix}$	2.05
10	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8.49e-6 & 5.06e-8 & 7.91e-8 \\ 5.06e-8 & 8.39e-6 & 2.63e-8 \\ 7.91e-8 & 2.63e-8 & 8.31e-6 \end{pmatrix}$	2.93
15	$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 7.85e-6 & 5.91e-7 & 7.03e-7 \\ 5.91e-7 & 8.03e-6 & 5.39e-7 \\ 7.03e-7 & 5.39e-7 & 7.91e-6 \end{pmatrix}$	3.40

Для неоднородных сред со случайной пористостью  $\phi = 6\%$  и  $10\%$  получены эффективные тензоры абсолютной проницаемости, в которых выделяются главные направления осей, что соответствует теоретическим сведениям о проницаемости пористых сред. Диагональные компоненты тензора абсолютной проницаемости значениями приближаются друг к другу при увеличении объёмной концентрации пор. Таким образом, установлено существование асимптотического порога объёмной концентрации пор, при котором возможен переход от анизотропной модели пласта к изотропной.

Величина абсолютной проницаемости зависит от объёмной концентрации пор и трещин в геологической среде. Для валидации алгоритма вычисления эффективной абсолютной проницаемости используются результаты физического эксперимента, приведённые в презентации компании EXA DIGITALROCK TECHNOLOGY (David Freed, August 9, 2017) [Freed D., 2017].

На рисунке 3 изображены три пористых образца кубической формы, которые были получены из кернов (сухой песчаник). Длина ребра каждого образца 5 см. В ходе лабораторных исследований для каждого образца были установлены пористость ( $\phi$ ), распределение радиусов пор по объёму, кривые капиллярного давления при просачивании воды и абсолютная проницаемость ( $k$ ),  $1 \text{ Д} = 0.9869 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ .

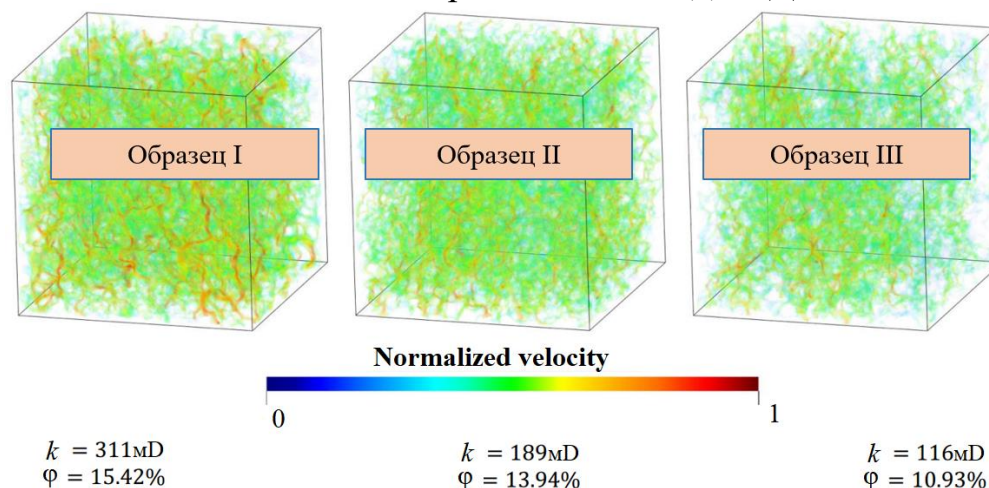


Рисунок 3 – Физический эксперимент: пористые образцы [Freed D., 2017]



На рисунке 4 показаны образцы для вычислительного эксперимента. Серым цветом показана матрица среды, белым и светло-серым – каналы течения флюида. Флюид – вода с вязкостью  $\mu = 1$  мПа·с и сжимаемостью  $C_f = 4.6 \cdot 10^{10}$  Па<sup>-1</sup>. Перепад давления по высоте образцов составляет 1000 КПа. Процесс фильтрации длится 24 часа, шаг дискретизации по времени составляет 10 минут.

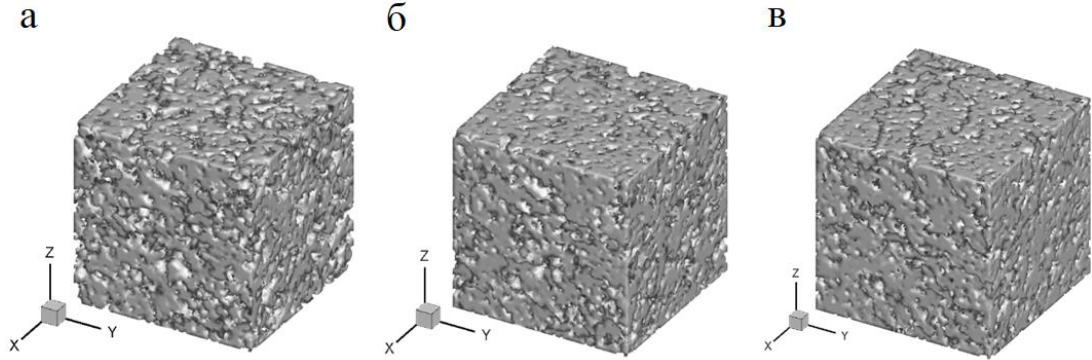


Рисунок 4 – Образцы для вычислительного эксперимента: объёмная пористость  $\phi = 15.42\%$  (а),  $13.94\%$  (б) и  $10.93\%$  (в)

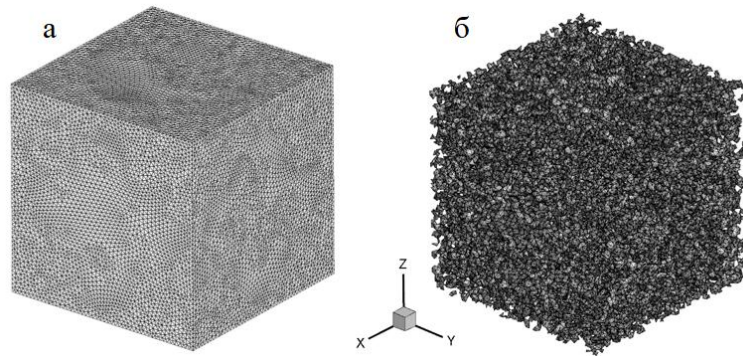


Рисунок 5 – Триангуляция образца №1: матрица (а) – 147468 вершин, 840309 тетраэдров; каналы (б) – 108151 вершина, 126975 тетраэдров

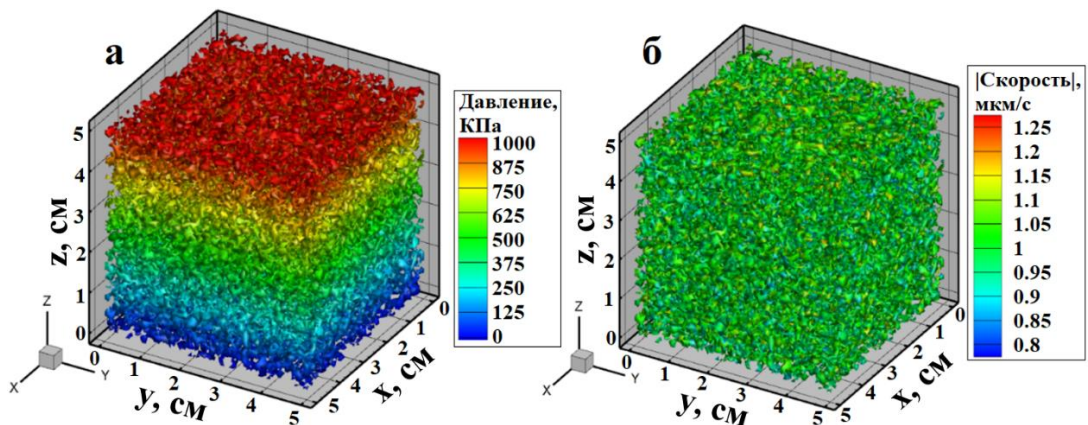


Рисунок 6 – Распределение давления (а) и модуля скорости (б) просачивания флюида в каналах образца №1 (спустя 23 ч)

Решение прямой задачи просачивания жидкости приведены на рисунке 6. В таблицах 4 – 6 представлены результаты решения обратной коэффициентной задачи для разных уровней зашумления данных измерений модуля скорости фильтрации в гетерогенной среде (данные физического эксперимента), влияние параметра регуляризации на погрешность решения обратной коэффициентной задачи.

Относительная погрешность вычисленной эффективной абсолютной проницаемости определяется по формуле

$$\Delta = \frac{|k_0 - k_{zz}|}{k} 100\%, \quad (52)$$

где  $k_0$  – экспериментальная абсолютная проницаемость (мД),  $k_{zz}$  – вычисленная абсолютная проницаемость (мД).

Таблица 4 – Образец I (пористость 15.42%): проницаемость и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективная абсолютная проницаемость $k_{zz}$ , мД	Погрешность $\Delta$ , %
5	$3.8e-8$	289	7.0
10	$9.1e-8$	283	9.0
15	$2.7e-7$	256	17.7

Таблица 5 – Образец II (пористость 13.94%): проницаемость и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективная абсолютная проницаемость $k_{zz}$ , мД	Погрешность $\Delta$ , %
5	$2.2e-8$	175	7.4
10	$5.9e-8$	171	9.5
15	$8.2e-7$	165	12.7

Таблица 6 – Образец III (пористость 10.93%): проницаемость и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективная абсолютная проницаемость $k_{zz}$ , мД	Погрешность $\Delta$ , %
5	$2.7e-8$	110	5.2
10	$3.2e-8$	106	8.6
15	$5.1e-7$	93	19.8

По результатам вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что величина z-компоненты тензора абсолютной проницаемости для пористых образцов увеличивается при увеличении объёмной доли порового пространства, что подтверждается данными физического эксперимента в [Freed D., 2017].

**В третьей главе** приведено описание разработанного программного комплекса. Программный комплекс реализован на языке программирования C# 7.0. Для запуска приложения требуется процессор с многоядерной архитектурой, установленная 64-битная операционная система и платформа .NET 4.6 и выше. Все результаты, приведённые в тексте диссертации, были получены на 4-ядерной компьютерной архитектуре с установленной 64-разрядной операционной системой Windows 10, процессор Intel® Core(TM) i7-4790 3.60 Ghz.

Программный комплекс предоставляет три пользовательских интерфейса: препроцессор, процессор и постпроцессор. Интерфейс препроцессора реализует методы генерации сеток и настройки решателей задачи фильтрации. Интерфейс процессора реализует разработанные вычислительные схемы МКЭ для решения задачи фильтрации и вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости. Интерфейс постпроцессора предоставляет пользователю средства визуализации данных, полученных в ходе вычислительных экспериментов.

Естественная параллельность разрывного метода Галёркина даёт возможность параллельного ассемблирования матрицы СЛАУ для любых типов базисных функций. Применение параллельного ассемблирования глобальной матрицы СЛАУ в классическом МКЭ и стабилизированном МКЭ возможно только при независимом переборе множеств базисных функций: в пространстве  $H^1$  – раздельная сборка для edge-, face- и bubble-функций, в пространстве  $\mathbf{H}(\text{div})$  – раздельная сборка для face- и bubble-функций на каждом конечном элементе. Результаты замера времени ассемблирования матрицы СЛАУ на процессоре Intel® Core(TM) i7-4790 3.60 Ghz для сетки, которая содержит 839185 тетраэдров и 3356740 степеней свободы, представлены на рисунке 7

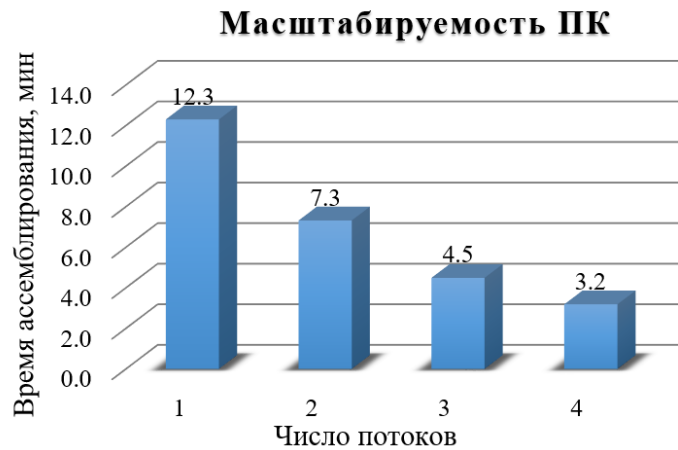


Рисунок 7 – Замер времени ассемблирования (C#: System.Threading)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработаны и реализованы в виде программного комплекса вычислительные схемы стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для моделирования процесса фильтрации несжимаемой жидкости в многомасштабной гетерогенной среде. В результате вычислительных экспериментов было установлено, что несимметричная постановка разрывного метода Галёркина показывает более высокую точность и устойчивость при решении широкого класса жёстких задач о просачивании однофазного флюида в геологической среде.
2. Разработан и реализован алгоритм вычисления тензора абсолютной проницаемости. Показана устойчивость предложенного алгоритма на классе задач, приближенных к реальным, с зашумлением модели наблюдения до 10%.
3. Подтверждено существование порога объёмной равномерной пористости гетерогенной среды, при котором возможен переход от анизотропной модели абсолютной проницаемости к изотропной. Для образцов кубической формы с равномерной пористостью более 10% вычисленный тензор абсолютной проницаемости является диагональным с отклонением величины диагональных элементов от их среднего значения менее 1%. Физическая релевантность

результатов математического моделирования процесса просачивания флюидов в исследуемых средах при использовании изотропной модели абсолютной проницаемости подтверждена сравнением модуля скорости потоков флюида в поровом пространстве с данными физического эксперимента. Расхождение составляет не более 10%.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1. Иткина Н.Б., Марков С.И. Применение разрывного метода Галёркина для решения сингулярно-возмущённых задач / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Вычислительные технологии. – 2016. – Т. 21. – Ч. 4. – с. 49-63.
2. Иткина Н.Б., Марков С.И. Применение стабилизированного векторного метода конечных элементов для моделирования течений газов / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Доклады Академии наук высшей школы. – Изд-во: НГТУ, 2016. – вып.2(31). – с.57-67. – DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67. – Работа выполнена: при финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-3627.2016.5.
3. Марков С.И., Иткина Н.Б. Многомасштабное моделирование процесса просачивания однофазного флюида в пористых средах / С.И. Марков, Н.Б. Иткина // Сибирские электронные математические известия (Siberian Electronic Mathematical Reports), т.15. – 2018. – с. 115–134. DOI 10.17377/semi.2018.15.013.
4. Epov M.I., Shurina E.P., Itkina N.B., Kutischeva A.U., Markov S.I. Finite element modeling of a multi-physics poro-elastic problem in multiscale media // Journal of Computational and Applied Mathematics Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 352. – 2019. – P. 1–22.
5. Itkina N.B., Markov S.I. Determining an effective permeability tensor in anisotropic media / N.B. Itkina, S.I. Markov // 2016 13th International Scientific Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE) Proceedings: сб. тр. науч.-техн. конф. – Novosibirsk: NSTU, October 3-6, 2016. – Vol.1(P.2). – P.538-543. – ISBN 978-1-5090-4068-1.
6. Markov S.I. Multiscale Nonconformal Finite Element Methods for Solving Problems with Moving Boundaries / S.I. Markov // 2018 14th International Scientific Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE) Proceedings: сб. тр. науч.-техн. конф. – Novosibirsk: NSTU, October 3-6, 2018. – Vol.1(P.4). – P.174-176. – ISBN 978-1-5386-7053-8.
7. Markov S.I., Itkina N.B. Projection Methods for Mathematical Modeling of Eddy Flows / S.I. Markov, N.B. Itkina // 2018 14th International Scientific Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE) Proceedings: сб. тр. науч.-техн. конф. – Novosibirsk: NSTU, October 3-6, 2018. – Vol.1(P.4). – P.177-180. – ISBN 978-1-5386-7053-8.