На правах рукописи

Лиханова Юлия Викторовна

Метод построения адаптивных треугольных и призматических сеток для численного исследования задач механики сплошных сред со сложной структурой решения

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2007

Работа выполнена в Институте вычислительных технологий СО РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Владимир Дмитриевич Лисейкин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Юрий Миронович Лаевский, кандидат физико-математических наук Ольга Васильевна Ушакова

Ведущая организация: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Защита состоится 9 ноября 2007 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу 630090, г. Новосибирск, пр. Ак. М.А. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомится в читальном зале вычислительной математики и информатики отделения ГПНТБ и ИВТ СО РАН по адресу 630090, г. Новосибирск, пр. Ак. М.А. Лаврентьева, 6.

Автореферат разослан 8 октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор Л.Б. Чубаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Разработка новых подходов к численному решению задач механики сплошных сред является *актуальной* проблемой. Это обусловлено тем, что ввиду появления мощных ЭВМ возникла необходимость создания высокопроизводительных алгоритмов для расчетов в областях со сложной геометрией границ. Такие задачи возникают, например при моделировании загрязнения окружающей среды остатками ракетного топлива, в процессе конструирования перспективных форм летательных аппаратов, для задач предсказания природных катастроф и др. Одновременно возросли требования к качеству разностных сеток и к времени их построения для обеспечения эффективных и экономичных численных экспериментов.

Исследования газодинамических течений в областях с криволинейной границей около тел сложной формы требуют применения специальных сеточных разбиений расчетной области, т.к. эффективность таких исследований во многом зависит от качества используемых в расчетах сеток. Например, при численном изучении факторов, влияющих на эффективность воздушных и подводных аппаратов, требуются разностные сетки с высокой концентрацией ячеек в зонах быстрого изменения характеристик физической среды (плотность, давление). В частности, такие ситуации имеют место при изучении многократных взаимодействий ударных волн, волн разрежения и контактных границ. Для преодоления трудностей, возникающих при численном изучения плазмы, удерживаемой магнитным полем, необходимы невырожденные разностные сетки, согласованные с магнитным полем. Также требуется сгущение узлов и ячеек сеток в тех зонах, в которых численные алгоритмы приводят к большим погрешностям.

Как следствие, в последнее время получают все большее распространение методы построения сеток с разнообразными видами адаптации, использующие результаты теорий дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии и вычислительной математики, поскольку такие сетки позволяют хорошо аппроксимировать области расчета со сложной геометрией границ (например, с малыми отверстиями) и подстраиваться под характерные особенности физических явлений, что позволяет существенно повысить скорость и надежность решения задач и получать результаты высокой точности. Вместе с тем задача разработки методов и соответствующих численных алгоритмов построения адаптивных сеток является сложной математической проблемой. Несомненно, исследования по этой проблеме являются востребованными при численном моделировании процессов механики сплошных сред.

Цель работы.

1. Нахождение оптимальных параметров управляющих метрик и построение треугольных и призматических сеток с различными видами адаптации.

2. Разработка методов построения гладких многоблочных треугольных и призматических сеток.

3. Создание алгоритмов и комплекса компьютерных программ для построения адаптивных разностных сеток с треугольными (в двумерном случае) и призматическими (в трехмерном случае) ячейками и их использование для численного решения задач механики сплошных сред.

4. Моделирование конвекционно-диффузионных процессов, возникающих в газовой динамике, с использованием эффективных вычислительных алгоритмов на адаптивных сетках.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Построены треугольные и призматические адаптивные разностные сетки на поверхностях, в двумерных и трехмерных областях, реализующие разнообразные свойства. В результате проведенных теоретических и численных исследований сформулированы управляющие метрики в частном виде для построения сеток с некоторыми видами адаптации.

2. Разработаны и реализованы алгоритмы по сглаживанию блочных треугольных и призматических сеток.

3. Разработаны численные алгоритмы и комплекс компьютерных программ для построения адаптивных разностных треугольных и призматических сеток, основанные на решении обращенных уравнений Бельтрами и диффузии относительно управляющей метрики.

4. Получены качественные оценки на производные решения одномерной сингулярно возмущенной задачи с негладкой правой частью. Эти оценки были использованы в качестве управляющих метрик для нахождения численного решения рассматриваемой задачи.

5. Решена конвекционно-диффузионная задача, моделирующая процессы газовой динамики, сформулированная в виде краевой задачи для двумерного сингулярно возмущенного уравнения с негладкой правой частью. Задача решалась на адаптивной сетке, построенной с помощью обобщения результатов, полученных для одномерного сингулярно возмущенного уравнения.

Достоверность результатов подтверждается строгой теоретической обоснованностью используемой математической модели, сопоставлением результатов численных расчетов с результатами, полученными другими авторами. Численное решение сингулярно возмущенных задач совпало с предсказанным аналитически. Сходимость разработанных алгоритмов была проверена при помощи измельчения сетки.

Теоретическое значение и научная новизна. Результаты теоретических и численных исследований важны как для изучения вопроса взаимосвязей управляющих метрик и качественных свойств сеток, так и для развития методов построения разностных сеток, позволяющих эффективно, с высокой точностью решать на них не только задачи, возникающие при моделировании процессов механики сплошных сред, но и более широкий класс задач с особенностями.

Впервые получены оценки на производные решения одномерной сингулярно возмущенной задачи с негладкой правой частью. С помощью этих оценок задана управляющая метрика, использовавшаяся для нахождения численного решения модельной конвекционно-диффузионной задачи, сформулированной в виде краевой задачи для двумерного сингулярно возмущенного уравнения с негладкой правой частью.

Практическая ценность работы. Разработанные алгоритмы можно эффективно использовать для расчетов различных задач механики сплошных сред на поверхностях, в двумерных и трехмерных областях со сложной геометрией границ на сетках с треугольными и призматическими ячейками (например, для расчета в областях с малыми отверстиями или областях, близких к треугольным).

Апробация работы. Разработанные алгоритмы были использованы для решения конвекционно-диффузионной задачи, моделирующей процессы газовой динамики, и показали свою высокую эффективность.

Представление на конференциях. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на: XII Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования"(Абрау-Дюрсо, 2007), 7th Meeting on Applied Scientific computing and Tools (Italy, Rome, 2007), Всероссийской конференции по вычислительной математике (Новосибирск, 2007), III Всероссийском совещании "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященном памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2006), Third International Conference of Applied Mathematics (Plovdiv, Technical University, 2006), 18th Chemnitz FEM Symposium (Germany, Schoneck, 2005), IX Всероссийском совещании по проблемам построения сеток для решения задач математической физики и XIV Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики"(Абрау-Дюрсо, 2002), Международной конференции по вычислительной математике (Новосибирск, 2002).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 9 печатных работ, куда входят (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций, в знаменателе – объем, принадлежащий автору): 1 монография (11.5/2.2 печ. л.), 1 учебное пособие (15.1/7.5 печ. л.), 2 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК (2.1/0.6 печ. л.), 4 статьи, опубликованные в 2 журналах (2.1/0.53 печ. л.) и 2 изданиях трудов конференций (0.9/0.26 печ. л.), а также 1 тезисы (0.125/0.03 печ. л.).

Личный вклад автора заключается в активном участии при формулировке частного вида некоторых управляющих метрик и их численном исследовании для нахождения оптимальных параметров [7]; разработке алгоритмов построения адаптивных треугольных и призматических сеток на основе численного решения обращенных уравнений Бельтрами и диффузии относительно управляющих метрик [1,9]; проведении численных экспериментов по построению треугольных и призматических сеток в областях и на поверхностях с различными видами адаптации [4-6,9]; исследованиях по построению блочных сеток с оптимальным сглаживанием по линии склейки [1,3]; проведении теоретических и численных исследований одномерной сингулярно возмущенной задачи с негладкой правой частью [2,8]; решении двумерной сингулярно возмущенной задачи, возникающей как модель конвекционно-диффузионных процессов, с использованием адаптивной сетки [2,7].

Структура. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Список литературы включает 112 наименования. Общий объем работы – 132 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы диссертации, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, дана краткая аннотация разделов диссертации.

В главе 1 описывается математическая модель построения многомерных адаптивных сеток, основанная на численном решении обращенных уравнений Бельтрами и диффузии, включающих управляющую метрику. Приведены формулы управляющих метрик, позволяющих конструировать сетки с различными индивидуальными и сбалансированными свойствами.

В разделе 1.1 представлена математическая модель построения разностных сеток, которая формулируется для произвольной n-мерной физической геометрии $S^{xn} \subset \mathbf{R}^{n+k}$ (кривая, область, поверхность), задаваемой локально параметризацией

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(\mathbf{s}) : S^n \to S^{xn}\,, \\ &\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+k})\,, \quad \mathbf{s} = (s^1, \dots, s^n)\,, \quad n \geq 1\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где S^n – n-мерная параметрическая область, $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ – гладкая вектор-функция ранга n в каждой точке $\mathbf{s} \in S^n$. При $k = 0$ поверхность S^{xn} является областью $X^n \subset \mathbf{R}^n$. В этом случае в качестве параметрической области можно рассматривать X^n.

Сетка в физической геометрии S^{xn} строится при помощи промежуточного невырожденного преобразования

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) : \Xi^n \to S^n\,, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)\,, \tag{2}$$

между параметрической областью S^n и соответствующей вычислительной (логической) областью Ξ^n (рис. 1). При этом узлы сетки в S^{xn} определяются отображением эталонной сетки, заданной в Ξ^n, при помощи преобразования

$$\mathbf{x}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] : \Xi^n \to S^{xn} \subset \mathbf{R}^{n+k}\,. \tag{3}$$

Форма вычислительной области Ξ^n и ячеек эталонной сетки выбирается в зависимости от формы S^{xn} и того, какой численный алгоритм применяется для решения физической задачи.

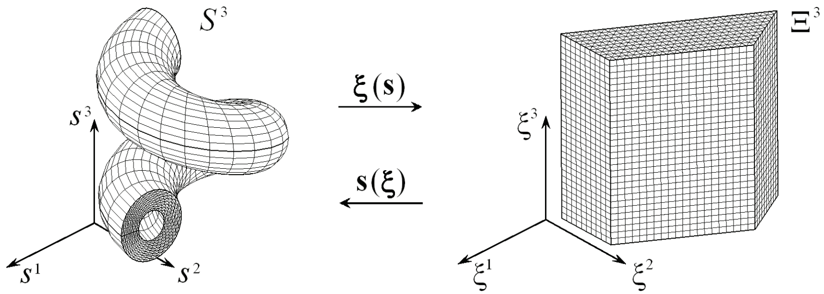

Рис. 1. Схема метода отображений для построения сетки в трехмерной области

В разделе 1.2 вводятся сеточные уравнения, основанные на эллиптических операторах Бельтрами и диффузии.

Промежуточное преобразование $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$ в рассматриваемой версии метода отображений определяется как обратное к вектор-функции

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) : S^n \to \Xi^n, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{s}) = [\xi^1(\mathbf{s}), \ldots, \xi^n(\mathbf{s})],$$

являющейся решением задачи Дирихле

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s^j}\Big(\sqrt{g^{\mathbf{s}}} g_{\mathbf{s}}^{jk}\frac{\partial \xi^i}{\partial s^k}\Big) = 0, \quad i,j,k = 1,\dots,n, \\
&\xi^i|_{\partial S^n} = \varphi^i(\mathbf{s}), \quad i = 1,\dots,n,
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $g_{\mathbf{s}}^{jk}$ — контравариантные компоненты управляющей метрики $g_{ij}^{\mathbf{s}}$ в координатах $s^1,\dots,s^n$, $g^{\mathbf{s}} = \det(g_{ij}^{\mathbf{s}})$, ∂S^n и $\partial \Xi^n$ — границы S^n и Ξ^n соответственно, а $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}) = [\varphi^1(\mathbf{s}),\dots,\varphi^n(\mathbf{s})]$ — взаимно-однозначное преобразование между ∂S^n и $\partial \Xi^n$ (рис. 1).

Уравнения в (4) называются уравнениями Бельтрами относительно управляющей метрики $g_{ij}^{\mathbf{s}}$. Функции $\xi^1(\mathbf{s}),\dots,\xi^n(\mathbf{s})$, являющиеся решением задачи (4), задают сеточную координатную систему в S^n и S^{xn}.

Краевая задача (4) корректна при любой невырожденной метрике $g_{ij}^{\mathbf{s}}$. А так как значение оператора Бельтрами $\Delta_B[\boldsymbol{\xi}]$ инвариантно относительно выбора координатной системы в S^{xn}, то сетка, полученная с помощью преобразования $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$, обратного решению задачи (4), не зависит от выбора параметризации (1).

Система уравнений в (4) является эллиптической и имеет дивергентную форму, следовательно, ее решение удовлетворяет принципу максимума. Соответственно узлы сетки, полученные решением задачи Дирихле (4), будут находиться внутри S^{xn} в том случае, когда вычислительная область Ξ^n выпукла (рис. 1). Более того, при $n = 2$ справедлива теорема Радо, из которой, в частности, следует, что преобразование $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{s})$, полученное решением задачи (4) с произвольной метрикой, является невырожденным, если область Ξ^2 выпукла и отображение границ S^2 и Ξ^2, заданное условием Дирихле, взаимно-однозначное. Эти свойства служат основной причиной того, что в задаче (4) базисная система уравнений Бельтрами сформулирована для преобразования $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{s})$, обратного к промежуточному отображению $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$.

Замена $\sqrt{g^{\mathbf{s}}}$ на $w(\mathbf{s})$ в системе уравнений (4) приводит к более общей системе уравнений

$$
\frac{\partial}{\partial s^j}\Big(w(\mathbf{s}) g_{\mathbf{s}}^{jk}\frac{\partial \xi^i}{\partial s^k}\Big) = 0, \quad i,j,k = 1,\dots,n, \tag{5}
$$

где $g_{\mathbf{s}}^{jk}$ — контравариантные элементы управляющей метрики в координатах $s^1,\dots,s^n$, а $w(\mathbf{s}) > 0$ — весовая функция, усиливающая или уменьшающая влияние метрики в нужных зонах S^{xn}. Уравнения (5) называются уравнениями диффузии.

Хотя любое невырожденное дважды дифференцируемое промежуточное преобразование (2) может быть найдено как обратное к решению уравнений Бельтрами, уравнения диффузии (5) позволяют в более простой форме, особенно при $n = 2$, реализовывать необходимые сеточные свойства в различных зонах физической геометрии S^{xn}. Однако необходимо помнить, что решение уравнений (5) зависит от выбора параметризации (1).

В разделе 1.3 вводится общая формула управляющей метрики, с помощью которой уравнения Бельтрами и диффузии позволяют конструировать сетки с различными свойствами.

Наиболее общая и простая формулировка управляющей метрики в S^{xn} в координатах $s^1, \dots, s^n$ имеет следующий вид:

$$g^{\mathbf{s}}_{ij} = z(\mathbf{s}) g^{xs}_{ij} + F^k_i(\mathbf{s}) F^k_j(\mathbf{s}), \ i, j = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, l, \qquad (6)$$

где $z(\mathbf{s}) \geq 0$ — весовая функция; $g^{xs}_{ij} = \mathbf{x}_{s^i} \cdot \mathbf{x}_{s^j}$ — метрика S^{xn}, а $F^k_i(\mathbf{s})$, $i = 1, \dots, n,$ — компоненты некоторого ковариантного вектора $\mathbf{F}^k(\mathbf{s})$.

Функции $z(\mathbf{s})$ и $F^k_i(\mathbf{s})$ в (6) должны удовлетворять условию $\det(g^{\mathbf{s}}_{ij}) > 0$. В частности, $\det(g^{\mathbf{s}}_{ij}) > 0$ при $z(\mathbf{s}) > 0$.

Кроме того, в этом разделе приводятся формулы управляющих метрик для построения сеток, сгущающихся в окрестности больших значений функций, больших градиентов, согласованных с векторным полем, со сбалансированными свойствами.

В разделе 1.4 выписываются обращенные уравнения Бельтрами и диффузии.

Для нахождения узлов сетки следует обратить уравнения Бельтрами и диффузии, чтобы получить уравнения относительно промежуточного преобразования $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$. Численное решение обращенных уравнений на эталонной сетке в Ξ^n определяет узлы промежуточной сетки в S^n. Отображение этих узлов при помощи $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ дает искомую сетку в S^{xn}.

Таким образом, краевая задача (4) преобразуется к следующему виду относительно зависимых переменных $s^i(\boldsymbol{\xi})$:

$$\begin{aligned} &g^{kl}_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial^2 s^i}{\partial \xi^k \partial \xi^l} = \frac{1}{\sqrt{g^{\mathbf{s}}}} \frac{\partial}{\partial s^j} \Big(\sqrt{g^{\mathbf{s}}} g^{ji}_{\mathbf{s}} \Big), \quad i, j, k, l = 1, \dots, n, \\ &s^i|_{\partial \Xi^n} = \psi^i(\boldsymbol{\xi}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \qquad (7)$$

Уравнения в (7) называются обращенными уравнениями Бельтрами.

Заменяя в (7) $\sqrt{g^{\mathbf{s}}}$ на $w(\mathbf{s})$, получаем обращенные уравнения диффузии

$$g^{kl}_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial^2 s^i}{\partial \xi^k \partial \xi^l} = \frac{1}{w(\mathbf{s})} \frac{\partial}{\partial s^j} \Big(w(\mathbf{s}) g^{ji}_{\mathbf{s}} \Big), \quad i, j, k, l = 1, \dots, n. \qquad (8)$$

В главе 2 представлены разработанные численные алгоритмы и комплекс программ для построения адаптивных структурированных треугольных и призматических сеток, основанные на решении обращенных уравнений Бельтрами и диффузии относительно управляющей метрики.

В разделе 2.1 обращенные уравнения Бельтрами (7) и диффузии (8) приводятся к виду, удобному для численной реализации.

В разделе 2.2 в кратком виде приводится алгоритм для конструирования адаптивных сеток в одномерном случае.

В разделе 2.3 представлен алгоритм для конструирования адаптивных треугольных сеток в двумерных областях и на поверхностях.

В разделе 2.4 представлен алгоритм для конструирования адаптивных призматических сеток в трехмерном случае.

В разделе 2.5 приводится краткое описание разработанного комплекса программ для построения адаптивных треугольных и призматических сеток с различными видами адаптации, предназначенного для дальнейшего его использования при решении задач математической физики. Комплекс написан на языке C++.

В главе 3 представлены результаты по построению одноблочных сеток с разнообразными видами адаптации и блочных сеток со сглаживанием по линии склейки.

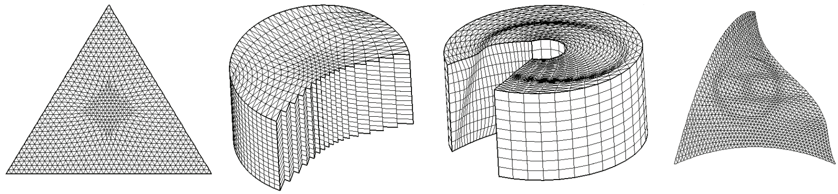

Рис. 2. Сетки, адаптирующиеся к кривым и областям в двумерных и трехмерных областях и удовлетворяющие сбалансированным свойствам. Для трехмерных областей сетка на граничных сегментах строилась при помощи двумерного алгоритма.

В разделе 3.1 приведены основные базисные слойные функции, использующиеся для задания управляющих метрик. Приведены примеры управления степенью сгущения сеток при помощи варьирования параметров этих функций. Представлены примеры сконструированных одноблочных сеток в двумерных и трехмерных областях и на поверхностях, сгущающихся в окрестности заданных кривых и областей. Также демонстрируются сетки, согласованные с модельным векторным полем и удовлетворяющие сбалансированным свойствам. Эти сетки были построены при помощи численного решения обращенных уравнений Бельтрами и диффузии (7) и (8) с использованием управляющих метрик, представленных в разд. 1.3, согласно алгоритмам, описанным в гл. 2.

В разделе 3.2 представлено 2 способа построения блочных сеток со сглаживанием по линии склейки: 1. при помощи интерполяции, 2. при помощи уравнений. Демонстрируются результаты, показывающие высокую эффективность данных способов сглаживания.

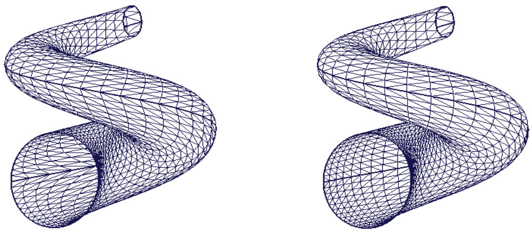

Рис. 3. Сетки на поверхности O-типа, построенные без сглаживания по линии склейки (*слева*) и со сглаживанием при помощи интерполяции (*справа*).

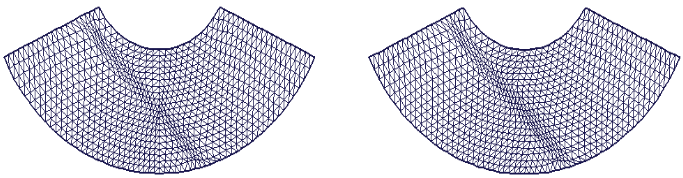

Рис. 4. Блочные сетки в двумерной области, построенные без сглаживания по линии склейки (*слева*) и со сглаживанием при помощи уравнений (*справа*).

В главе 4 излагаются результаты решения одномерной и двумерной сингулярно возмущенных задач с негладкой правой частью с непосредственным использованием адаптивных сеток, конструируемых с помощью численного решения обращенных уравнений Бельтрами и диффузии.

Сингулярно возмущенные задачи – это задачи, описываемые сингулярно возмущенными уравнениями, т. е. уравнениями, имеющими малый параметр ε перед старшими производными. Такие задачи обладают высокой прикладной значимостью как элементы математических моделей при исследовании разнообразных процессов в физике, химиии, биологии.

Характерной чертой сингулярно возмущенных уравнений является то, что их решения и/или производные решений имеют особые узкие зоны (внутренние и пограничные слои), в которых происходит резкий переход от одного устойчивого состояния к другому или к заданным граничным значениям. Такие ситуации возникают, например, в гидродинамике в течении вязкой жидкости в области пограничных слоев, где вязкая жидкость переходит с граничных значений, заданных условием прилипания, к невязкой жидкости, или, например, в окрестности ударных волн, где газ переходит из дозвукового в сверхзвуковое состояние.

Как правило, производные решения сингулярно возмущенного уравнения в центре внутренних и/или пограничных слоев достигают порядка ε^{-k}, $k > 0$, т. е. стремятся к бесконечности при стремление малого параметра к нулю. Вне слоев производные оцениваются некоторой положительной константой, не зависящей от ε. Вследствие этих особенностей сингулярно возмущенные уравнения достаточно трудны для решения посредством стандартных методов в случае, когда параметр ε очень мал. Используемый автором метод позволяет на основе знаний о качественном поведении решения задачи строить сетки, адаптирующиеся к структуре решения, а затем на этих сетках решать сами задачи, что позволяет получить хорошую аппроксимацию решения сингулярно возмущенных уравнений во всей области определения, в том числе и внутри слоев, на сетках с небольшим числом узлов, что повышает скорость и точность расчетов.

Некоторые сингулярно возмущенные уравнения возникают как модели конвекнционно-диффузионных процессов в задачах газовой динамики. Типичной моделью такого процесса является краевая задача с малым параметром ε перед оператором Лапласа $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$:

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon \Delta \mathbf{u} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{x} \in X^n\,, \\
&\mathbf{u}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{x} \in \partial X^n\,.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Здесь X^n – ограниченная область; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – конвективный вектор; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – некоторая вектор-функция; $\varepsilon > 0$ – коэффициент диффузии, который может быть мал по сравнению с $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. При анализе слоев обычно предполагается, что есть достаточная согласованность между коэффициентами уравнения и граничными условиями в углах X^n, чтобы решение задачи не имело особенностей в окрестностях граничных узлов.

В разделе 4.1 представлены теоретические и численные результаты по решению одномерного сингулярно возмущененного уравнения.

Многомерные сингулярно возмущенные задачи в общем случае слишком сложны для эффективного теоретического анализа их решений. Однако, уравнения можно упростить без потери общности, если производные решения принимают большие значения только вдоль одного координатного направления. В этом случае качественное поведение решений в слоях может быть смоделировано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

Частным случаем сингулярно возмущенного уравнения является бисингулярное уравнение, которое характеризуется тем, что вырожденная исходная сингулярно возмущенная задача имеет особенность. Такая задача более трудна для аналитического исследования, и как следствие, менее изучена, хотя имеет большую прикладную значимость. В работе исследуется следующая самосопряженная бисингулярная краевая задача:

$$\begin{aligned} & L[u] \equiv -\varepsilon u'' + x^{\alpha} g(x,u) = 0\,, \\ & 0 < x < 1\,, \quad 0 < \varepsilon \leq 1\,, \quad 0 < \alpha < 1\,, \\ & \Gamma[u] \equiv [u(0,\varepsilon), u(1,\varepsilon)] = (A_0, A_1)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$g(x,u) \in C^{2,2}([0,1] \times R)\,.$$

Эта задача является бисингулярной из-за негладкости правой части.

Для задачи (10) верна следующая теорема.

Теорема 1

Пусть $u(x,\varepsilon)$ является решением задачи (10) и пусть выполняется условие $g_u(x,u) \geq c > 0$, тогда имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |u'(x,\varepsilon)| \ &\leq \ \Psi_1 = M_1 \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha+2}} \exp(-mx/\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+2}}) + \\ &+ M_2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \exp[s(x-1)/\varepsilon^{\frac{1}{2}}] + M_3, \\ |u''(x,\varepsilon)| \ &\leq \ \Psi_2 = M_1 \varepsilon^{-\frac{2}{\alpha+2}} \exp(-mx/\varepsilon^{\frac{1}{\alpha+2}}) + \\ &+ M_2 \varepsilon^{-1} \exp[s(x-1)/\varepsilon^{\frac{1}{2}}]\,, \end{aligned} \tag{11}$$

здесь $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq s \leq |c^{\frac{1}{2\alpha}}|$, m – произвольная константа, не зависящая от x и ε.

Зная оценки, при помощи численного алгоритма для решения одномерных уравнений Бельтрами, описанного в разд. 2.2, строятся сетки с узлами, сгущающимися в слоях сингулярно возмущенной задачи (10).

При переходе от узла к узлу на этой сетке функция $u(x,\varepsilon)$ не будет сильно меняться, поскольку узлы сгущаются в областях слоев, поэтому можно использовать обычные вычислительные методы. Для численного решения задачи (10) использовалась схема с направленными разностями.

В разделе представлены результаты численных экспериментов.

В разделе 4.2 демонстрируются результаты применения разрабатываемых алгоритмов построения адаптивных разностных сеток для решения двумерной сингулярно возмущенной задачи (частный случай конвекционно-диффузионной задачи (9)):

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon\Delta u + \mathbf{a}(\mathbf{s})\cdot\nabla u + f(\mathbf{s},u) = 0\,, \quad \mathbf{s}\in S^2\,,\\
&u(\mathbf{s}) = u_0(\mathbf{s})\,, \quad \mathbf{s}\in\partial S^2\,,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^i \partial s^i}\,,\ i=1,2\,;\quad \nabla u = \Bigl(\frac{\partial u}{\partial s^1},\frac{\partial u}{\partial s^2}\Bigr)\,;
$$

$S^2 \subset R^2$ – некоторая ограниченная область; $\partial S^2 = \bar{S^2}\setminus S^2$ – ее граница; $\mathbf{a}(\mathbf{s})$ – конвективный вектор; $f(\mathbf{s},u)$ – некоторая функция; $0 < \varepsilon \ll 1$ – коэффициент диффузии.

Рассмотрим задачу (12) со следующими условиями:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}\,,\\
&f(\mathbf{s},u) = (s^1)^\alpha (s^2)^\beta g(\mathbf{s},u)\,, \quad g_u(\mathbf{s},u)\geq m > 0\,,\\
&0\leq \alpha,\beta < 1\,, \quad m - \text{некоторая константа},\\
&S^2 = S^2_a = [0,1]\times[0,1],\\
&S^2 = S^2_b = \Bigl\{(s^1,s^2) : 0\leq s^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{s^2}{\sqrt{3}} \leq s^1 \leq 1-\frac{s^2}{\sqrt{3}}\Bigr\}\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Процесс нахождения численного решения задачи (12) с условиями (13) разбивается на два этапа:

1) задание метрики, обеспечивающей сгущение сетки в области S^2 в окрестности больших градиентов решения $u(\mathbf{s})$ рассматриваемой задачи, и построение такой сетки;

2) численное решение задачи на полученной сетке.

Компоненты метрики задаются при помощи обобщения одномерных оценок (11).

Теперь при помощи сформулированной метрики, используя численный алгоритм, описанный в разд. 2.3, строим сетки, сгущающуюся в зонах больших градиентов решения $u(\mathbf{s},\varepsilon)$ задачи (12) с условиями (13) внутри соответствущих областей S^2.

Отметим, что для получения более эффективных результатов необходимо также сгустить сетку не только внутри области S^2, но и на ее границах (точнее, сначала на границах, а потом уже внутри области). Это делается при помощи алгоритма, описанного в разд. 4.1, где для нахождения сгущения на каждой из границ Ψ берется из соответствующих оценок.

Теперь, построив адаптивную сетку, решаем саму сингулярно возмущенную задачу (12) на ней. Для этого преобразуем ее к более подходящему виду, а именно, перейдем к производным по переменным $\xi^1, \xi^2 \in \Xi^2$, где Ξ^2 – эталонная вычислительная область. Решая получившиеся уравнения с использованием схемы стабилизирующей поправки, описанной в гл. 2, находим численное решение задачи (12) с условиями (13).

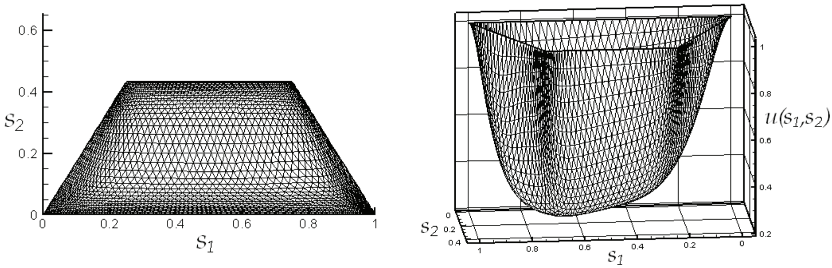

Рис. 5. Сетка, построенная в области S_b^2, сгущающаяся в окрестности больших градиентов решения $u(\mathbf{s})$ задачи (12) с условиями (13) (*слева*) и решение этой задачи (*справа*).

В разделе приведены результаты численных расчетов, которые демонстрируют эффективность использования адаптивных сеток для решения сингулярно возмущенных задач – они позволяют аппроксимировать решение, имеющее погранслои, равномерно на всей области при небольшом количестве узлов, что демонстрируется на рис. 5.

В заключении сформулированы основные результаты работы:

1. Построены треугольные и призматические адаптивные разностные сетки на поверхностях, в двумерных и трехмерных областях, реализующие разнообразные свойства. В результате проведенных теоретических и численных исследований сформулированы управляющие метрики в частном виде для построения сеток с некоторыми видами адаптации.

2. Разработаны и реализованы два алгоритма по сглаживанию блочных треугольных и призматических сеток:

· при помощи интерполяции;

· при помощи обращенных уравнений Бельтрами и диффузии.

3. Разработаны численные алгоритмы и комплекс компьютерных программ для построения адаптивных разностных треугольных и приз-

матических сеток,основанные на решении обращенных уравнений Бельтрами и диффузии относительно управляющей метрики.

4. Получены качественные оценки на производные решения одномерной сингулярно возмущенной задачи с негладкой правой частью. Эти оценки были использованы в качестве управляющих метрик для нахождения численного решения рассматриваемой задачи.

5. Решена конвекционно-диффузионная задача, моделирующая процессы газовой динамики, сформулированная в виде краевой задачи для двумерного сингулярно возмущенного уравнения с негладкой правой частью. Задача решалась на адаптивной сетке, построенной с помощью обобщения результатов, полученных для одномерного сингулярно возмущенного уравнения.

Дальнейшим направлением работы является разработка алгоритмов построения подвижных сеток, интерактивно адаптирующихся к особенностям решения задач математической физики со сложной геометрией границ, и решение этих задач. Также планируется развитие направления построения многоблочных сеток со сложной топологией, не только с треугольными и призматическими, но также и с гибридными ячейками. Для этой цели предполагается разработанные расчетные модули для построения треугольных и призматических сеток интегрировать в комплекс компьютерных программ, разработанный для построения сеток с четырехугольными и гексаэдральными ячейками.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монография

1. *Глассер А.Г., Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В.* Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии. Новосибирск: Наука, 2006.

Учебное пособие

2. *Лисейкин В.Д., Лиханова Ю.В.* Метод координатных преобразований для численного решения сингулярно возмущенных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2006.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

3. *Likhanova Yu.V., Liseikin V.D., Patrakhin D.V., Vaseva I.A.* Generation of Block Structured Smooth Grids // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 4. С. 3-12.

4. *Лисейкин В.Д., Васева И.А., Лиханова Ю.В.* Конструирование разностных сеток с помощью численного решения обращенных уравнений

Бельтрами и уравнений диффузии // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, специальный выпуск, часть 2. С. 13-20.

Прочие публикации

5. *Glasser A.H., Liseikin V.D., Vaseva I.A., Likhanova Yu.V.* Some Computational Aspects on Generating Numerical Grids // Russian Journal of Numerical Analisys and Mathematical Modelling. 2006. Vol. 21. No 6. P. 481-505.

6. *Glasser A.H., Liseikin V.D., Kitaeva I.A., Likhanova Yu.V.* Specification of Monitor Metrics for Generating Balanced Numerical Grids, Joint Bulletin of NCC and IIS. 2005. Vol. 13. P. 1-13.

7. *Глассер А.Г., Лисейкин В.Д., Васева И.А., Лиханова Ю.В.* Некоторые аспекты построения адаптивных сеток. // Труды Всероссийской конференции "Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления". Вычислительный центр РАН, Москва. 2006. С. 23-32.

8. *Kitaeva I.A., Liseikin V.D., Lihanova Y.V.* Numerical grid generation based on qualitative analysis of singularities, Proceeding of the International Conference on Computational Mathematics. Новосибирск. 2002. P. 621-625

9. *Vaseva I.A., Liseikin V.D., Morokov Yu.N., Lihanova Yu.V.* Application of Beltrami and Diffusion Equations to the Development of Grid Codes. Book of Abstracts. IAC Report, Italy. 2007. P. 82-83.

Тираж 100 экз. Заказ №
Формат 60x84 1/16 05.10.2007
Отпечатано в ЗАО РИЦ "Прайс-курьер"
630090, г. Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 6