

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Дальневосточный федеральный университет» (ДФУ)

На правах рукописи

ВОРОНЦОВА ЕВГЕНИЯ АЛЕКСЕЕВНА  
МЕТОД ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ С  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОТСЕЧЕНИЯМИ И ЕГО  
ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ  
С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Нурминский Евгений Алексеевич

Владивосток – 2015

# Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Введение</b> . . . . .  | <b>5</b>  |
| <b>Глава 1. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса и ее постановка как задачи оптимизации</b> . . . . . | <b>20</b> |
| 1.1 Интервальная модель «затраты-выпуск» . . . . .   | 20        |
| 1.2 Исследование разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели «затраты-выпуск» . . . . .                                | 24        |
| 1.3 Основные направления развития НДО . . . . .  | 26        |
| 1.3.1 Субградиентные алгоритмы . . . . .   | 31        |
| 1.3.2 Метод центров тяжести и метод эллипсоидов . . . . .  | 42        |
| 1.3.3 Оптимальные алгоритмы . . . . .  | 44        |
| 1.3.4 Методы с полной информацией (bundle-методы и гибридные модели) . . . . .   | 46        |
| <b>Глава 2. Метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями</b> . . . . .  | <b>54</b> |
| 2.1 Описание метода . . . . .  | 54        |
| 2.2 Сходимость метода . . . . .  | 64        |
| 2.3 Вычислительные эксперименты . . . . .  | 67        |
| 2.3.1 Построение профилей производительности. . . . .  | 68        |
| 2.3.2 Функция MAXQUAD. . . . .   | 69        |
| <b>Глава 3. Быстро сходящийся алгоритм одномерного поиска в задачах недифференцируемой оптимизации</b> . . . . .                           | <b>73</b> |
| 3.1 Актуальность . . . . .   | 73        |
| 3.2 Постановка задачи . . . . .  | 74        |
| 3.3 Описание метода . . . . .  | 75        |
| 3.4 Программная реализация . . . . .   | 76        |

|  |  |            |
|--|--|------------|
| 3.5  | Вычислительные эксперименты . . . . .  | 81         |
| 3.5.1  | Тестовые задачи с кусочно-квадратичной<br>оптимизируемой функцией. . . . .                             | 81         |
| 3.5.2  | Тестовые задачи с экспоненциально-квадратичной<br>целевой функцией. . . . .                            | 82         |
| 3.5.3  | Тестовые задачи с кубично-линейной оптимизируемой<br>функцией. . . . .                                 | 83         |
| 3.5.4  | Тестовая задача с кусочно-линейной целевой функцией.   | 83         |
| 3.5.5  | Кубично-кубичная функция и профили<br>производительности. . . . .                                      | 89         |
| 3.6  | Быстрый алгоритм одномерного поиска . . . . .  | 92         |
| <b>Глава 4. Практическое решение линейной задачи о допусках<br/>для интервальной модели межотраслевого баланса . . . . .</b> |  | <b>93</b>  |
| 4.1  | Создание модели задачи на языке моделирования AMPL. . . . .  | 93         |
| 4.2  | Вычислительные эксперименты . . . . .  | 95         |
| 4.2.1  | Модельная задача размерности 2. . . . .  | 96         |
| 4.2.2  | Оценка перспектив развития экономики Приморского<br>края с помощью решения линейной задачи о допусках. | 98         |
| 4.2.3  | Решение серии задач большой размерности с<br>построением профилей производительности. . . . .          | 109        |
| 4.2.4  | Определение разрешимости интервальных систем<br>линейных уравнений. . . . .                            | 111        |
| <b>Заключение . . . . .</b>  |  | <b>116</b> |
| <b>Литература. . . . .</b>   |  | <b>118</b> |

## Обозначения и сокращения

В работе используются следующие сокращения:

ИСЛАУ — интервальная система линейных алгебраических уравнений;

ЛЗД — линейная задача о допусках;

ЛП — линейное программирование;

МОБ — межотраслевой баланс;

МОП — метод отделяющих плоскостей;

НДО — недифференцируемая оптимизация;

ОГС — обобщенный градиентный спуск;

обозначения в интервальном анализе:

$\mathbf{a}$  — интервал  $[\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{a}} \leq a \leq \bar{\mathbf{a}}\}$ ;

$|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}$  — модуль интервала  $\mathbf{a}$ ;

$\bar{\mathbf{a}}$  — верхний конец интервала  $\mathbf{a}$ ;

$\underline{\mathbf{a}}$  — нижний конец интервала  $\mathbf{a}$ ;

$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})$  — середина интервала  $\mathbf{a}$ ;

$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})$  — радиус интервала  $\mathbf{a}$ ;

и прочие обозначения:

$\text{Arg min}_{x \in Q} f(x)$  — совокупность всех точек, в которых достигается минимум функции  $f(x)$  на множестве  $Q$ ;

$\text{conv}(M)$  — выпуклая оболочка множества  $M$ ;

$\text{dom } f(x)$  — область определения функции  $f(x)$ ;

$\text{diam } X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x', x'' \in X} \|x' - x''\|$ ;

$\text{epi } f$  — надграфик функции  $f$ ;

$\text{int } X$  — внутренность множества  $X$ ;

$\mathbb{R}_+$  — множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство.

# Введение

## Актуальность темы исследования

В математической экономике часто возникают задачи с неточными исходными данными. Принятие решений в практической деятельности экономических агентов осложняется необходимостью учета большого количества разнообразных факторов. Часто информация о воздействии данных факторов и их взаимосвязях является неполной.

В качестве модели описания неопределенных данных можно использовать вероятностно-статистическую [4, 25], нечеткую [87] и интервальную [73, 127] модели.

В наиболее популярной классической *вероятностно-статистической* модели задается вероятностное пространство и изучаемая переменная  $x$  является случайной величиной. В «нечеткой» модели используется понятие нечеткого множества вида  $\{(x, \mu(x)) \mid x \in X, 0 \leq \mu(x) \leq 1\}$ , где  $\mu(x)$  – функция принадлежности конкретного значения  $x$  данному нечеткому множеству;  $X$  – заданная область возможных значений  $x$ . Функция принадлежности обычно задается экспертным путем на основании данных об источниках неточности значений переменной  $x$ .

В *интервальной* модели описания данных неопределенность параметра  $x$  описывается только границами его возможных значений, т.е. задается интервалом  $x \in [x_{min}, x_{max}]$ . Интервалы неопределенности позволяют описать неоднозначные, переменные и/или неточные исходные данные. Все значения внутри интервала предполагаются равновероятными.

В ряде прикладных экономических задач интервальная модель оказывается наиболее предпочтительной (см., например, [19]). Одним

классом таких задач является интервальная линейная задача о допусках для системы балансовых уравнений Леонтьева [39] (в англоязычных публикациях обычно используют термин «input-output model»):

$$x = Ax + y, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор объемов продукции по  $n$  отраслям,  $y \in \mathbb{R}^n$  – вектор объемов конечного потребления по этим отраслям,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$  – матрица коэффициентов прямых производственных затрат. В интервальной системе балансовых уравнений Леонтьева вместо точечных значений коэффициентов  $a_{ij}$  используют их оценки сверху и снизу. Т.е. коэффициенты прямых производственных затрат известны лишь с некоторой интервальной неопределённостью [108, 147]:  $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ , где  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  – интервальная матрица. Здесь и далее интервалы и интервальные величины выделяются полужирным шрифтом, что соответствует международному стандарту обозначений в интервальном анализе [151]. Вектор конечного потребления  $y$  также становится интервальным:  $y \in \mathbf{y}$ , так как объем конечного потребления тоже определяется неточно или допускает некоторые вариации. Итак, система уравнений Леонтьева (1) записывается в следующем виде:

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{y}. \quad (2)$$

Важная прикладная задача для интервальной системы уравнений Леонтьева формулируется следующим образом [147]: для каких объемов производства  $x$  при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат  $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$  конечное потребление будет принадлежать заданным интервалам  $\mathbf{y}_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ?

Множество всех таких векторов  $x$  образует так называемое *допускное множество решений* интервальной системы линейных

алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$(E - A)x = y,$$

где  $E$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ . Допусковое множество решений ИСЛАУ вида  $Ax = b$  образуется всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что произведение  $Ax$  принадлежит интервальному вектору правых частей  $b$  для любой матрицы  $A \in \mathbf{A}$ .

Размерность интервальной системы уравнений Леонтьева может быть достаточно большой<sup>1</sup>, не менее нескольких сотен переменных (см., например, [126]). В этом случае прямое описание допускового множества практически бесполезно, поскольку число ограничивающих гиперплоскостей ( $Ax = \underline{b}$ ,  $Ax = \bar{b}$ ), которые нужно выписать, растет экспоненциально. В этом случае прямое описание допускового множества заменяют на нахождение внутренних *оценок* этого множества. Более конкретно, задача формулируется в следующем виде: найти брус<sup>2</sup>, содержащийся в допусковом множестве рассматриваемой ИСЛАУ. Эту задачу называют *интервальной линейной задачей о допусках*.

Допусковое множество решений может оказаться пустым. В этом случае говорят, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*. В этом случае исходная постановка задачи теряет смысл, поэтому исследование разрешимости интервальной линейной задачи о допусках становится отдельной задачей.

Одним из подходов к исследованию разрешимости интервальной линейной задачи о допусках является использование *распознающего функционала* С.П. Шарого [72, 73]. Пустота/непустота допускового

<sup>1</sup>Для сравнения: матрица коэффициентов прямых производственных затрат, подготовленная Министерством труда США в 1939 году, имела размерность  $38 \times 38$ , в 1947 году –  $190 \times 190$ , в 1955 году –  $450 \times 450$  [95].

<sup>2</sup>Брус – прямоугольный параллелепипед в пространстве  $\mathbb{R}^n$  со сторонами, параллельными координатным осям, т.е. геометрический образ интервального вектора.

множества решений ИСЛАУ определяется по знаку решения задачи на максимизацию распознающего функционала.

Другим подходом является решение данной задачи с помощью методов линейного программирования (ЛП). Последний подход не всегда является желательным, поскольку так теряется большая часть содержательного смысла в решении, которую и обеспечивал распознающий функционал, сформированный через исходные интервалы в данных. И значения распознающего функционала, и его максимум имеют чёткую интерпретацию, которая при решении задачи методами ЛП совершенно игнорируется. С помощью методов ЛП можно найти какую-то точку из допустимого множества решений, но она не обладает всеми теми преимуществами, которые имеет максимум распознающего функционала. Найденная методами ЛП точка даже может лежать на границе допустимого множества решений (при использовании симплекс-метода).

Поэтому первый подход к задаче, с использованием распознающего функционала, представляется наиболее перспективным. Особенно зримо преимущество использования распознающего функционала чувствуется в ситуациях, когда для рассматриваемой интервальной системы уравнений допустимое множество решений пусто, т.е. задача несовместна в обычном смысле. Тогда в ряде практических постановок процесс решения завершается, а в некоторых других нет: какое-то решение все равно предъявлять нужно, несмотря на формальную несовместность данных. Таковы задачи восстановления зависимостей (построения регрессии), где допустимое множество решений возникает при исследовании так называемого сильного согласования данных [40, 103]. В таких ситуациях методы ЛП либо просто неприменимы, либо требуют для своего применения специализированной техники и выхода за существующие алгоритмы (см., например, [28]). В любом случае такие методы не приспособлены для решения именно интервальных задач.

Распознающий функционал является глобально вогнутым и негладким (недифференцируемым). Таким образом, одной из вычислительных задач, которую требуется решить в работе, является задача выпуклой оптимизации недифференцируемых функций.

Разработка нового метода решения данной оптимизационной задачи имеет теоретическую и практическую значимость не только для исходной в работе линейной задачи о допусках для интервального уравнения Леонтьева, но и для множества других практических задач, связанных с принятием рациональных инженерных или экономических решений, которые при формализации сводятся к задачам нелинейного программирования. Нелинейные экстремальные задачи часто возникают в экономико-математических исследованиях (см., например, [18, 55, 65, 72]). В данных задачах целевые функции и ограничения, задающие допустимую область, не являются линейными. Одним из важнейших классов таких задач является класс задач выпуклого программирования (целевая функция и множество ограничений задачи выпуклы).

Теория выпуклой оптимизации стала определяющим направлением развития выпуклого анализа после появления теперь уже классической монографии Р. Рокафеллара [145]<sup>3</sup>. Задачи выпуклого программирования допускают построение методов с глобальными характеристиками сходимости, подходящими для большинства практических приложений. Данное свойство привело к появлению большого количества оптимизационных методов и подходов (см., например, [2, 3, 21, 23, 26, 30, 42, 43, 48, 55, 57, 78, 79, 83]).

В данной работе разработаны новые методы решения задач оптимизации без ограничений для выпуклых недифференцируемых

---

<sup>3</sup>Более подробно о развитии теории и практики выпуклой оптимизации см. главу 1 и приведенные там ссылки.

функций в следующей общей постановке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

где  $x = (x^1, \dots, x^n)$  – вектор  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  с обычным скалярным произведением  $xy$ ;  $f(x)$  – выпуклая, не обязательно непрерывно дифференцируемая функция. Также в работе данные методы применяются для определения разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели Леонтьева.

Недифференцируемые функции широко используются в современной теории и приложениях математического программирования. Имеется несколько источников, порождающих задачи недифференцируемой оптимизации (НДО).

Во-первых, это задачи математического программирования большой размерности с блочной структурой и сравнительно небольшим числом связей между блоками [82]. Использование схем декомпозиции для решения таких задач приводит к задачам минимизации или максимизации, как правило, негладких функций от связывающих переменных или от множителей Лагранжа, соответствующих связывающим ограничениям.

Во-вторых, это задачи нелинейного программирования, для решения которых используется метод негладких штрафных функций.

В-третьих, это задачи оптимального управления с непрерывным или дискретным временем. Использование принципа максимума или дискретного принципа максимума во многих случаях приводит к задачам минимизации функций с разрывными градиентами.

В-четвертых, это задачи минимизации функции максимума, характерные для моделей игрового характера.

Многие задачи полуопределенного программирования (semidefinite programming), т.е. задачи выпуклой оптимизации с ограничениями в виде требований неотрицательной определенности матричных переменных,

можно рассматривать как задачи НДО (см., например, [105, 106]).

Теория систем рассматривает общую задачу оптимизации как одно из универсальных средств моделирования систем различных классов. Поэтому функции с «разрывными» градиентами могут непосредственно входить в математическую модель задачи как результат кусочно-гладкой аппроксимации технико-экономических характеристик оптимизируемых объектов.

Таким образом, область применения методов решения задач недифференцируемой оптимизации весьма широка.

Численные методы решения задач НДО можно классифицировать по формальным или содержательным признакам. В зависимости от того, известна ли заранее структура минимизируемой функции, можно выделить методы минимизации целевых функций с известной моделью и методы **оракульного типа**.

Различают три типа моделей целевой функции [46]: геометрические модели (известен факт включения множества, содержащего текущее приближение к решению, в другой объект (например, допустимое множество)); алгебраические модели (известна конкретная формула с параметрами для вычисления целевой функции); структурные модели (известна структура целевой функции (например, целевая функция является суммой гладкой выпуклой функции и недифференцируемой или даже не являющейся непрерывной выпуклой функции)). Знание модели целевой функции позволяет построить эффективные методы решения задач НДО, такие, как алгоритмы техники сглаживания [130], градиентные методы минимизации составных функций [46, 132] и др. Хотя такие методы структурной оптимизации обладают лучшими характеристиками скорости сходимости по сравнению с методами, работающими по концепции черного ящика (black-box), их применение сильно ограничено необходимостью иметь какую-либо информацию о модели целевой функции. В задачах со

сложной структурой методы структурной оптимизации также не всегда могут применяться из-за ограничений алгоритмов техники сглаживания или невозможности построения хорошего самосогласованного барьера для применения барьерного субградиентного метода [46]. Методы, предлагаемые в данной работе, лишены этих недостатков, поскольку работают по концепции черного ящика (единственной информацией, получаемой в ходе работы итеративных методов, являются ответы оракула первого порядка – процедуры, позволяющей вычислить значение целевой функции и значение одного из субградиентов целевой функции в заданной точке).

Принципы построения оптимизационных методов оракульного типа для минимизации гладких и негладких функций совершенно различны. Дифференцируемость целевой функции позволяет легко построить релаксационную (минимизирующую) последовательность, гарантированно приводящую к решению (см., например, [135]). Для негладких функций такие методы не применимы в принципе, поскольку произвольно выбранный субградиент не определяет релаксационное направление [55]. Методы выпуклой НДО для поиска направления убывания целевой функции могут использовать только свойства монотонности субдифференциального отображения, что значительно уменьшает их скорость сходимости.

Большинство численных методов решения задач НДО без ограничений можно условно разделить на две группы: **субградиентные алгоритмы** [29, 47, 53, 75, 136, 138] и **bundle-методы** (от англ. bundle – пучок, связка; общепринятого русскоязычного названия этих методов пока нет) [101, 105, 111, 116, 118, 121]. Также существуют методы, являющиеся гибридом идейных схем методов вышеупомянутых типов (например, [85, 86, 92, 93, 104, 119]). Общим принципом работы для всех реализаций упомянутых методов НДО является использование оракула.

Методы, предлагаемые в главе 2 данной работы, можно условно отнести к группе bundle-методов, но с важной особенностью – работа методов происходит в расширенном сопряженном пространстве субградиентов и значения сопряженной функции Лежандра-Фенхеля, и исходная задача заменяется на неэкстремальную задачу вычисления сопряженного функционала в заданной точке.

**Целью работы** является исследование и применение методов определения разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого экономического баланса; разработка, исследование и доказательство сходимости эффективных численных методов из семейства методов отделяющих плоскостей, предназначенных для решения задач выпуклой оптимизации для недифференцируемых функций; установление практической вычислительной эффективности разработанных методов; а также их применение для решения задач интервального анализа.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать и исследовать метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенный для решения задачи оптимизации выпуклых недифференцируемых функций.
2. Разработать и исследовать модификацию алгоритма одномерного поиска, предназначенного для минимизации одномерных кусочно-гладких функций.
3. Выяснить практическую скорость сходимости разработанных численных методов с проведением сравнительного тестирования.
4. Применить разработанный комплекс программ для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса.

5. Исследовать другие подходы к решению линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса.

**Предмет и объект исследования.** Объектом исследования являются экономические системы, рассматриваемые в условиях высокой неопределенности. Предмет исследования – эффективные численные методы и алгоритмы решения задач выпуклой оптимизации, применяемые для исследования экономических систем.

**Методы исследования.** В работе применяются современные методы интервального анализа, математического программирования и теории выпуклого анализа. С помощью вычислительных экспериментов осуществляется проверка теоретических результатов.

**Научная новизна.**

1. Предложен новый эффективный численный метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенный для решения задач выпуклой НДО, и доказана его сходимость.
2. Разработан быстрый алгоритм одномерного поиска для решения задач одномерной минимизации недифференцируемых функций. Данный алгоритм имеет квадратичную скорость сходимости, что позволяет успешно использовать его на каждой итерации метода отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями для решения вспомогательной задачи минимизации.
3. Создана и протестирована программная реализация предложенных методов. Проведена сравнительная оценка практических реализаций ряда методов НДО с построением профилей производительности.
4. Предложенные в работе методы успешно применены для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервального уравнения межотраслевого баланса региона (Приморского края).

**Достоверность** полученных в работе результатов обусловлена строгостью математических доказательств, использованием апробированных научных методов и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

**Теоретическая значимость** работы состоит в том, что разработанные математические методы решения определенного класса интервальных задач одновременно являются дальнейшим развитием исследований в области построения методов выпуклой недифференцируемой оптимизации, не требующих дополнительной информации о структуре оптимизируемой функции.

**Практическая значимость** работы заключается в возможности применения разработанного комплекса программ не только для представленного в работе класса интервальных задач, но и для решения различных задач НДО, часто возникающих в приложениях. В качестве одного из примеров разработанные методы были успешно применены для исследования разрешимости интервальных систем линейных уравнений с использованием распознающего функционала множества решений. Кроме того, в работе приведена модель решения линейной задачи о допусках для интервального уравнения межотраслевого баланса, написанная на языке моделирования AMPL, которую можно использовать для исследования возможностей численного решения данной задачи с помощью различных онлайн-солверов.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов по программам ДВО РАН: «Проективные алгоритмы и программное обеспечение для решения сверхбольших экстремальных и равновесных задач транспортного моделирования» (№ гос. регистрации 12-I-П18-04 – Программа Президиума РАН № 18), «Алгоритмы и программное обеспечение для решения полиэдральных выпуклых проективных задач» (№ гос. регистрации 12-III-A-01И-017); в рамках проектов РФФИ № 09-01-

00042-а «Проективные методы декомпозиции на основе фейеровских отображений с малыми возмущениями» (2009–2012 гг.), № 13-07-12010-офим «Облачные и грид-технологии для задач транспортного моделирования» (2013–2015 гг.); а также в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение 14.604.21.0052 от 30.06.2014 г. с МОН, уникальный идентификатор проекта RFMEFI60414X0052.

### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

В соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в диссертации проведена разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов для решения задач нелинейной оптимизации; предложенные численные методы реализованы в виде комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов; проведено комплексное исследование проблемы прогнозирования межотраслевого баланса с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (п. 3, 4 и 5 области исследований).

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

- XV Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения», 23–30 июня 2011 г., г. Иркутск – пос. Листвянка;
- Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», посвященной 75-летию со дня рождения акад. В.П. Мясникова, 11–17 сент. 2011 г., г. Владивосток;
- 3-й международной конференции «Математическое моделирование,

оптимизация и информационные технологии», 19–23 марта 2012 г., г. Кишинэу, респ. Молдова;

- XXXVI Дальневосточной математической школе-семинаре им. акад. Е.В. Золотова, 4–10 сент. 2012 г., г. Владивосток;
- III International conference "Optimization and applications" (OPTIMA–2012), September 23–30, 2012, Costa da Caparica, Portugal;
- XVI Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения», 30/06/2014 – 06/07/2014, г. Иркутск;
- XXXVIII Дальневосточной математической школе-семинаре им. акад. Е.В. Золотова, 1–5 сент. 2014 г., г. Владивосток;
- Всероссийской научно-практической конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, приур. к 105-летию педагогического образования на Дальнем Востоке, 2–5 дек. 2014 г., г. Уссурийск;
- научных семинарах кафедры математических методов в экономике Дальневосточного федерального университета;
- научном семинаре лаборатории 3.3 Института динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск);
- VI Международной конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», 28/06/2015 – 04/07/2015, г. Омск.

**Публикации и личный вклад автора.** По результатам исследований опубликовано 17 печатных работ [5]– [18], [51, 154, 155], из которых две [18, 51] в соавторстве и три [7, 18, 155] в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Все результаты диссертации, выносимые на защиту, получены Е.А. Воронцовой самостоятельно.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка обозначений и сокращений и списка литературы. Определения и теоремы нумеруются в соответствии с главой, в которой они находятся. Нумерация формул двухиндексная, первый индекс обозначает номер главы, второй индекс – номер формулы.

**Первая глава** посвящена описанию интервальной модели межотраслевого экономического баланса, постановке линейной задачи о допусках для этой модели и описанию ее экономического смысла. Поскольку оказывается, что при решении интервальной линейной задачи о допусках методом распознающего функционала возникает задача негладкой оптимизации, в оставшейся части главы приводится краткий обзор существующих методов решения задач негладкой оптимизации. Здесь также приведены базовые определения и результаты выпуклого анализа, используемые в следующих главах.

**Вторая глава** посвящена построению и численному тестированию нового эффективного метода отделяющих плоскостей (МОП) с дополнительными отсечениями, который предназначен для решения задач недифференцируемой минимизации выпуклых функций. В параграфе 2.2 теоретически доказана сходимость предлагаемого метода. В параграфе 2.3 приведены результаты вычислительных экспериментов сравнительного тестирования разработанного метода с другими известными методами решения задач НДО. Методика тестирования основана на построении профилей производительности [99]. Показано, что на приведенных задачах МОП с дополнительными отсечениями является более предпочтительным. Преимущество предложенного метода возрастает с увеличением размерности задачи и требуемой точности решения задачи.

На каждой итерации МОП с дополнительными отсечениями необходимо решать вспомогательную задачу одномерной минимизации выпуклой негладкой функции. Для ее решения применяется быстрый алгоритм одномерного поиска, разработанный в **третьей главе** диссертации. Данный алгоритм может показывать квадратичную скорость сходимости. Проведенное тестирование алгоритма с помощью специально написанных программ на наборе тестовых задач, в том числе сгенерированных случайным образом, подтвердило квадратичную

скорость сходимости алгоритма одномерного поиска.

**Четвертая глава** посвящена практическому применению методов, разработанных в главах 2 и 3. С помощью данных методов решается описанная в главе 1 линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого экономического баланса (на примере Приморского края).

В **Заключении** сформулированы основные результаты и научные выводы проведенного исследования.

Полный объем диссертации составляет 135 страниц с 29 рисунками и 8 таблицами. Список литературы содержит 156 наименований.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору кафедры математических методов в экономике ДВФУ Е.А. Нурминскому за помощь в работе; профессору С.П. Шарому (Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск) за постоянное внимание и помощь в данной работе; всем участникам научного семинара лаборатории 3.3 Института динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск); а также всем участникам объединенного семинара «Информационно-вычислительные технологии» Института вычислительных технологий СО РАН, кафедры математического моделирования НГУ и кафедры вычислительных технологий НГТУ за полезное обсуждение данной работы.



$\bar{\mathbf{a}}$  и  $\underline{\mathbf{a}}$  обозначают, соответственно, верхний и нижний концы интервала  $\mathbf{a}$ ;

$|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}$  – модуль интервала.

Для интервальных уравнений обычное понятие решения не имеет смысла, поэтому приходится иметь дело с *множествами решений*.

**Определение 1.1.** [73] *Объединенным множеством решений ИСЛАУ называется множество, образованное всевозможными решениями точечных систем линейных уравнений  $Ax = b$ , где  $A \in \mathbf{A}$ ,  $b \in \mathbf{b}$ .*

В данном разделе рассматривается другое, так называемое *допусковое множество решений*.

**Определение 1.2.** [70] *Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множество*

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (Ax \in \mathbf{b})\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

образованное всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что произведение  $Ax$  попадает в  $\mathbf{b}$  для любого  $A \in \mathbf{A}$ .

Интересно, что до 70-х годов XX века исследователи в области интервальных систем уравнений рассматривали только объединенное множество решений. По свидетельству А. Ноймайера [133], допусковое множество решений впервые было рассмотрено в докторской диссертации немецкого математика Х. Бека. Для допускового множества решений (1.3) в 80-е годы XX века применялся термин *ограниченное множество решений* (restricted solution set) [133]. Позже в англоязычных публикациях начал и продолжает использоваться в настоящее время термин *tolerable solution set* (см., например, [143, 149]). В русскоязычной литературе иногда используется не совсем удачный термин «допустимое множество решений» (неудачный, поскольку он переводится на английский язык

как feasible solution set). Поэтому, по аналогии с [73], в данной работе используется термин «допусковое множество решений», не приводящий к недоразумениям.

Допусковое множество решений часто возникает в задачах математической экономики. В данном разделе рассматривается модель межотраслевого экономического баланса

$$x = Ax + y, \quad (1.4)$$

т.е. классическое уравнение Леонтьева [39], где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор объемов продукции по  $n$  отраслям,  $y \in \mathbb{R}^m$  – вектор объемов конечного потребления по  $m$  отраслям,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$  – матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

В интервальном уравнении Леонтьева вместо точечных значений коэффициентов  $a_{ij}$  используют их оценки сверху и снизу. Т.е. коэффициенты прямых производственных затрат известны лишь с некоторой интервальной неопределённостью [108,147], что является вполне логичным для масштабов всей отрасли:  $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ , где  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  – интервальная матрица.

Вектор конечного потребления  $y$  также становится интервальным:  $y \in \mathbf{y}$ , т.е. потребителям достаточно не какого-то конкретного значения объема потребления, а нахождения этого объема потребления в определенном «коридоре» – интервале  $\mathbf{y}$ . Итак, интервальный аналог уравнения Леонтьева (1.4) записывается в следующем виде:

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{y}. \quad (1.5)$$

Если в вещественном случае решение системы (1.4) относительно  $x$  позволяет спрогнозировать необходимые для запланированного потребления  $y$  объемы производства по отраслям, то в интервальном случае важная прикладная задача для интервального уравнения

Леонтьева может быть сформулирована следующим образом [147]: для каких объемов производства  $x$  при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат  $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$  конечное потребление будет принадлежать заданным интервалам  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ?

Множество всех таких векторов  $x$  образует *допусковое множество решений* интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$(E - A)x = \mathbf{y},$$

где  $E$  – единичная матрица размерности  $m \times n$ .

**Теорема 1.1.** [73] *Допусковое множество решений ИСЛАУ является выпуклым многогранником в  $\mathbb{R}^n$ .*

Тем не менее, прямое описание допускового множества решений для систем большой размерности является слишком трудоемким: количество ограничивающих гиперплоскостей растет пропорционально  $m \cdot 2^n$ . Поэтому вместо прямого описания допускового множества гораздо проще найти некоторые его *оценки*, а еще лучше – подмножества. Исходная задача заменяется на так называемую *линейную задачу о допусках* (ЛЗД).

**Определение 1.3.** *Линейной задачей о допусках называется задача нахождения (по возможности, большего) бруса, который содержится в допусковом множестве решений данной интервальной линейной системы уравнений.*

Задача о допусках для интервальных алгебраических систем, не обязательно линейных, была сформулирована Е. Нудингом в 1972 г. (см. также обзор [133]). Применение линейной задачи о допусках в анализе балансовых экономических моделей с интервальной неопределенностью впервые было сделано в работе [146].

## 1.2. Исследование разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели «затраты-выпуск»

Важной подзадачей линейной задачи о допусках является задача исследования ее разрешимости, поскольку допустовое множество может оказаться пустым даже для «хороших» интервальных данных. Например, для следующей системы (пример взят из [73]):

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [1, 3] \end{pmatrix}$$

допустовое множество является пустым. В таких случаях говорят, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*.

Исследование разрешимости линейной задачи о допусках впервые было сделано в работе [146], но приведенные формулы могли применяться только для интервальных матриц  $\mathbf{A}$  специального вида и неотрицательных правых частей  $\mathbf{b}$ . В работе [68] для проверки разрешимости использовался «тест средней системы» (вычисляется решение  $x^*$  точечной системы  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ , затем оно тестируется на включение  $\mathbf{A}x^* \subseteq \mathbf{b}$ ). В [73] приведены контрпримеры, показывающие, что данный тест не всегда является верным.

Другим подходом к определению разрешимости ЛЗД может быть так называемый формально-алгебраический подход (см. [73], глава 11), при котором сначала решается ИСЛАУ, и только затем принимается решение о пустоте или непустоте допустового множества. Недостатками этого подхода являются необходимость решения ИСЛАУ и возможность существования таких интервальных систем, для которых решения не существует, но задача о допусках совместна. Поэтому более перспективным методом, предназначенным для полного исследования разрешимости ЛЗД, представляется техника, основанная на использовании *распознающего*

функционала множества решений [150].

**Теорема 1.2.** [73] Пусть даны интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор правой части  $\mathbf{b}$ , а выражением

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (1.6)$$

определяется распознающий функционал  $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда принадлежность  $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна выполнению неравенства  $\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ . Кроме того, функционал  $\text{Tol}(x)$  является вогнутым и достигает конечного максимума на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Итак, алгоритм исследования разрешимости интервальной ЛЗД выглядит следующим образом.

*Шаг 1.* Решить задачу безусловной максимизации по  $x$  вогнутого функционала

$$\max \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T^*. \quad (1.7)$$

*Шаг 2.* Если  $T^* \geq 0$ , то  $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , т.е. ЛЗД для  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  разрешима. Иначе перейти к *Шагу 4*.

*Шаг 3.* Если  $T^* > 0$ , то  $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , и принадлежность точки  $\tau$  допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных. Перейти к *Шагу 5*.

*Шаг 4.*  $T^* < 0$ , следовательно, ЛЗД для  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  неразрешима.

*Шаг 5.* Конец.

Как следует из приведенного алгоритма, для практического решения ЛЗД для интервального уравнения Леонтьева необходимо решить задачу максимизации недифференцируемой вогнутой функции (1.7) (или, что эквивалентно, задачу минимизации выпуклой функции), поскольку распознающий функционал  $\text{Tol}(x)$  является негладкой функцией. Далее в этой главе приводится обзор существующих методов решения этой задачи и обосновывается необходимость разработки новых методов ее решения.

Новый метод решения задачи (1.7) – метод отделяющих плоскостей (МОП) с дополнительными отсечениями – предложен в главе 2, а в главе 3 предложен метод решения задачи одномерной минимизации выпуклых недифференцируемых функций, который применяется на каждой итерации МОП с дополнительными отсечениями. Следует отметить, что предложенные методы могут применяться не только для рассматриваемых в работе задач, но и в целом ряде других практических задач, возникающих в экономике (см., например, [12, 17, 18, 46, 48, 55, 65, 75, 78, 131]). Само направление «недифференцируемая оптимизация» начало развиваться после появления работы [75], в которой метод обобщенного градиентного спуска применялся для решения транспортных задач [74] большой размерности.

### 1.3. Основные направления развития НДО

История современной теории оптимизации началась в конце сороковых годов XX века с открытия Джорджем Данцигом симплекс-метода [98] для численного решения основной задачи линейного программирования. Симплекс-метод быстро стал популярным прежде всего среди экономистов из-за наличия программ для ЭВМ и большого количества приложений. Особая формулировка условий экстремальности — теория двойственности в ЛП — была создана Данцигом, Гейлом, Куном и Таккером [102] под влиянием работ фон Неймана по теории игр.

В СССР оптимизационная тематика развивалась независимо от американских исследователей <sup>1</sup>. Но, что любопытно, история советской теории оптимизации началась также с постановки задачи ЛП и предложения некоторых методов ее решения Л.В. Канторовичем в 1939 году [35].

---

<sup>1</sup>Подробный экскурс в предпосылки, причины и анализ успехов развития математического программирования в СССР см. в [142].

Спустя двадцать лет, в шестидесятых годах XX века, стало понятно, что многие прикладные задачи, являющиеся, по сути, оптимизационными задачами, нельзя свести к задачам ЛП, но можно свести к проблемам минимизации выпуклых функций на выпуклых множествах. Возникло естественное обобщение теории ЛП на нелинейный случай. Так появилось выпуклое программирование, или *выпуклая оптимизация*.

**Определение 1.4.** *Задачей выпуклого программирования называют задачу минимизации нелинейной выпуклой функции при нелинейных выпуклых ограничениях.*

Классик выпуклого анализа Р. Рокаффеллар также связывает появление этой новой дисциплины с развитием методов оптимизации:

“Convex functions other than norms began to attract much more attention once optimization started up in the early 1950’s, and through the economic models that became popular in the same era, involving games, utility functions, and the like. Still, convex functions weren’t handled in a way that was significantly different from that of other functions. That only came to be true later”. [153, с. 20]

Перевод: *«Не нормы векторов, а выпуклые функции стали привлекать всё больше внимания с тех пор, как оптимизация начала своё развитие в начале 1950-х годов и по мере того, как экономические модели в теории игр, с функциями полезности и тому подобными вещами становились популярными в то же самое время. Все же с выпуклыми функциями тогда не работали каким-то сильно отличающимся от других функций способом. Это стали делать позже».*<sup>2</sup>

Однако, условия экстремума для выпуклого случая в терминах седловой точки были сформулированы Куном и Таккером еще в 1951 году. Эта формулировка годится и для негладких задач.

Бурными темпами теория выпуклой оптимизации стала развиваться

---

<sup>2</sup>Перевод автора.

после выхода в 1970 году теперь уже классической монографии Р. Рокафеллара «Выпуклый анализ» [145]. Невозможно переоценить то влияние, которое эта книга оказала на развитие теории и методов оптимизации. «В последние годы при исследовании экстремальных задач, возникающих в различных областях прикладной математики, все более важную роль играют методы, связанные с понятием выпуклости. Цель этой книги — ввести читателя в теорию выпуклых множеств и функций. Основной упор при этом делается на приложения к теории экстремальных задач», — пишет автор в предисловии к изданию (цит. по [61, с. 7] — вышедшему спустя 3 года русскому переводу [145]).

Таким образом, выпуклый анализ стал удобным аппаратом для исследования экстремальных задач.

В СССР основоположником использования методов выпуклого анализа в теории и практике оптимизации стал Б.Н. Пшеничный. В 1969 году вышло первое издание его книги «Необходимые условия экстремума» [56]. Эту же линию исследований продолжила монография А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова [33]. Общую теорию двойственности для задач выпуклой оптимизации разработал Е.Г. Гольштейн [21].

Похожая история была с недифференцируемостью функций. Обнаружилось, что во множестве оптимизационных задач целевые функции не имели производной в точке минимума. Подобные задачи минимизации функций с разрывными градиентами естественным образом возникали при декомпозиции оптимизационных проблем большой размерности с блочной структурой; при решении задач на минимакс, характерных для моделей оптимального планирования и исследования операций; при параметрическом анализе экстремальных решений; в статистике при оценке параметров по методу наименьших модулей и во многих других областях.

Два основополагающих метода минимизации дифференцируемых

функций — градиентный метод и метод Ньютона — используют линейную или квадратичную аппроксимацию целевой функции с разложением в ряд Тейлора [55]. Но для негладкой функции такая аппроксимация невозможна. Другие методы минимизации дифференцируемых функций также становятся неработоспособными при переходе к недифференцируемым функциям. Поэтому разработка методов решения задач минимизации недифференцируемых функций требовала поиска новых идей. В результате развития теории и практики решения таких задач сложились новые научные направления, условно разделяемые на *недифференцируемую оптимизацию* и *негладкий анализ*.

В негладком анализе изучаются свойства функций, не имеющих производных в классическом смысле, и свойства множеств таких функций. Крупные результаты в области негладкого анализа, представляющего собой дальнейшее развитие классического математического анализа, были получены в 70–80 годах прошлого века. Основоположником данного направления является Ф. Кларк. Тогда же возникло понятие обобщенного градиента, или субградиента, являющегося аналогом понятия градиента для гладких функций, и рассматривался *субдифференциал*, как множество всех субградиентов. Монография [96], в которой предложено понятие обобщенного градиента для локально липшицевых функций, сейчас известного как субдифференциал Кларка, вышла в свет в 1983 году.

**Определение 1.5.** [36] *Обобщенной производной локально липшицевой скалярной функции  $f$  в точке  $x$  по направлению  $v$  называется предел*

$$f^\circ(x; v) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \downarrow 0}} \sup \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}.$$

**Определение 1.6.** [36] *Обобщенным градиентом функции  $f$  в точке  $x$  называется следующее множество:*

$$\partial f(x) = \{ \zeta \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in \mathbb{R}^n f^o(x; v) \geq \zeta v \}.$$

В случае выпуклости функции  $f$  обобщенный градиент  $\partial f(x)$  совпадает с рассматриваемым в выпуклом анализе субдифференциалом, т.е. множеством векторов  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих неравенству  $f(x+u) - f(x) \geq \zeta u$  для всех  $u \in \mathbb{R}^n$ .

За прошедшие годы негладкий анализ стал отдельным самостоятельным разделом современной математики, а возникшая одновременно недифференцируемая оптимизация превратилась в качественный набор методов и алгоритмов для решения различных задач оптимизации.

Вычислительные методы НДО развиваются в двух направлениях:

- Методы, предназначенные для решения задач минимизации негладких функций с особой, заранее определенной структурой, которая задается в явном виде;
- Методы, предназначенные для решения задач минимизации любых негладких функций, о структуре которых заранее ничего не известно. Есть лишь оракул, вычисляющий значения функции и ее субградиента в произвольной точке.

К первому типу относятся, например, работы по решению задач на минимакс, выполненные В.Ф. Демьяновым [24]. Также разработаны специальные методы сглаживания, или аппроксимации [90], для задач минимизации, в которых поверхности разрыва градиентов целевой функции заданы в явном виде. После такого сглаживания можно применять для решения этих задач методы минимизации гладких функций.

Методы минимизации негладких функций, полученные в данной работе, относятся ко второму направлению.

Среди негладких задач минимизации наиболее глубоко исследованными являются выпуклые экстремальные задачи, поскольку в условиях отсутствия гладкости свойство выпуклости может предоставить достаточно большой выбор аналитических средств развития теории экстремальности (см., например, [57]).

**1.3.1. Субградиентные алгоритмы** Что касается СССР, то там не было четкого разделения между теорией негладкого анализа и теорией НДО, и они развивались неотделимо друг от друга.

Так, метод обобщенного градиентного спуска для минимизации кусочно-линейных выпуклых функций был впервые предложен Наумом Зуселевичем Шором в 1962 г. [75]. Точнее, в работе [75] было предложено использовать метод спуска в пространстве потенциалов для решения двойственных к транспортным задачам в матричной и сетевой формах задач. Позже данный метод стали называть методом обобщенного градиентного спуска (ОГС). Метод ОГС сначала применялся для решения задач транспортного типа, а затем стал применяться для минимизации класса произвольных выпуклых функций. Этот факт имеет очень большое значение еще и потому, что до этого времени вопрос о том, существуют ли в принципе численные методы решения задач выпуклой НДО, оставался открытым. Н.З. Шор стал первым, кто доказал, что такие методы существуют. Далее этот подход был расширен и обоснован самим Н.З. Шором, Ю.М. Ермольевым [29], Б.Т. Поляком [53, 54]. В данных работах предлагались другие способы нормировки направления движения и другие правила выбора шагового множителя. «Последующие усовершенствования метода ОГС дали ряд численных методов оптимизации негладких (недифференцируемых)

функций, которые существенно повлияли на развитие линейного, нелинейного, дискретного и стохастического программирования» [63]. В 2012 г. в [131] было показано, как эффективно использовать субградиентные методы при решении задач оптимизации сверхбольшой ( $10^8$ –  $10^{12}$ ) размерности с разреженными субградиентами.

Позднее метод ОГС стал называться субградиентным. Понятие субградиента, или обобщенного градиента Шора, подробно описано в [78] (1979 г.).

**Определение 1.7.** [78] *Субградиентом выпуклой функции  $f(x)$  в точке  $x_0 \in \text{dom } f$  называется вектор  $g(x_0)$ , удовлетворяющий соотношению:*

$$f(x) - f(x_0) \geq g(x_0)(x - x_0), \quad x \in \text{dom } f. \quad (1.8)$$

Здесь и далее под произведением векторов  $xu$  понимается скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$  евклидова пространства, если не указано иное. Если  $f(x)$  конечна в окрестности точки  $x_0$ , выпукла и дифференцируема в точке  $x_0$ , то субградиент  $g(x_0)$  единственен и совпадает с градиентом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  [61].

**Определение 1.8.** *Множество  $\partial f(x_0)$  всех субградиентов для функции  $f$  в точке  $x_0$  называется субдифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$ .*

Субдифференциал существует в любой точке  $x \in \text{int dom } f$  и является *выпуклым* замкнутым ограниченным множеством.

Следующее свойство субдифференциала является ключевым в теории оптимизации.

**Теорема 1.3.** [78] *Равенство  $f(x^*) = \min_{x \in \text{dom } f} f(x)$  имеет место тогда и только тогда, когда*

$$0 \in \partial f(x^*).$$

Из (1.8) следует, что при  $f(x) < f(x_0)$  выполняется следующее неравенство:

$$-g(x_0)(x - x_0) > 0. \quad (1.9)$$

Геометрически данная формула означает, что антисубградиент в точке  $x_0$  образует острый угол с любым направлением, проведенным из точки  $x_0$  в точку  $x$  с меньшим значением  $f(x)$ . Следовательно, если минимум функции  $f(x)$  существует и точка  $x_0$  не является точкой минимума, то при сдвиге из точки  $x_0$  по направлению  $-g(x_0)$  расстояние до точки минимума будет убывать. Данный факт является центральной идеей **субградиентного метода минимизации** недифференцируемых функций.

**Определение 1.9.** [63] *Субградиентным методом называется процедура построения последовательности  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  по правилу*

$$x_{k+1} = x_k - h_k \frac{g(x_k)}{\|g(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

где  $x_0$  – начальное приближение,  $h_k$  – шаговый множитель,  $g(x_k)$  – произвольный субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x_k$ . Процесс останавливается при достаточной близости  $g(x_k)$  к 0.

Сходимость субградиентного метода утверждается следующей теоремой.

**Теорема 1.4.** [78] *Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция с ограниченным множеством минимумов  $X^*$ ,  $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$  – последовательность положительных чисел, обладающая следующими свойствами:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k = +\infty.$$

Тогда последовательность  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , полученная по правилу (1.10), при произвольном  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  обладает одним из следующих свойств: либо существует такое  $k = k^*$ , что  $x_{k^*} \in X^*$ , либо  $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{x \in X^*} \|x_k - x\| = 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ .

Имеется несколько вариантов доказательства теоремы 1.4 или ее аналога для субградиентного метода в форме  $x_{k+1} = x_k - \gamma_k g(x_k)$  [29, 53, 76, 78]. Все они основаны на изучении поведения последовательности  $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ , где  $\rho_k = \min_{x \in X^*} \|x_k - x\|$ .

При дополнительных предположениях о свойствах функции  $f(x)$  были получены субградиентные методы, сходящиеся со скоростью геометрической прогрессии.

**Теорема 1.5.** [78] Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция, определенная на  $\mathbb{R}^n$ , и для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  при некотором  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < \pi/2$ ) выполняется неравенство

$$g(x)(x - x^*(x)) \geq \cos \varphi \|g(x)\| \cdot \|x - x^*(x)\|,$$

где  $x^*(x)$  – точка, принадлежащая множеству минимумов функции  $f(x)$  и лежащая на кратчайшем расстоянии от  $x$ . Тогда, если при заданном  $x_0$  выбрать величину  $h_0$ , удовлетворяющую следующим неравенствам:

$$h_0 \geq \begin{cases} \|x^*(x_0) - x_0\| \cos \varphi, & \pi/4 \leq \varphi < \pi/2, \\ \|x^*(x_0) - x_0\| / (2 \cos \varphi), & 0 \leq \varphi < \pi/4; \end{cases}$$

определить  $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$  в соответствии с рекуррентной формулой

$$h_{k+1} = h_k r(\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$r(\varphi) = \begin{cases} \sin \varphi, & \pi/4 \leq \varphi < \pi/2, \\ 1/(2 \cos \varphi), & 0 \leq \varphi < \pi/4, \end{cases}$$

и вычислить  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  по формуле (1.10), то либо при некотором  $k^*$  субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x_{k^*}$  равен 0 и точка  $x_{k^*}$  принадлежит области минимумов, либо при всех  $k = 0, 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$\|x_k - x^*(x_k)\| \leq \begin{cases} h_k / \cos \varphi, & \pi/4 \leq \varphi < \pi/2, \\ 2 \cos \varphi \cdot h_k, & 0 \leq \varphi < \pi/4. \end{cases}$$

Таким образом, при известном заранее угле  $\varphi$ , регулируя шаг по формулам теоремы 1.5, можно получить сходимость к минимуму со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $r(\varphi)$ .

Возможен вариант субградиентного метода со ступенчатой регулировкой шага, также сходящийся со скоростью геометрической прогрессии.

**Теорема 1.6.** [78] Пусть выпуклая функция  $f(x)$  определена на  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^*$  — единственная точка минимума  $f(x)$  и заданы начальное приближение  $x_0$  и числа  $\sigma$  и  $h_0$ , причем  $\sigma \geq 2$ ,  $h_0 \geq \|x_0 - x^*\|/\sigma$ . Рассмотрим множество

$$Y = \{y \mid \|y - x^*\| \leq \sigma h_0\},$$

и пусть для любой пары точек  $x, z \in Y$  такой, что  $f(x) = f(z) \neq f(x^*)$ , выполняется условие

$$\|x - x^*\| \leq \sigma \|z - x^*\|.$$

Рассмотрим субградиентный метод (1.10), где  $h_k = h_0 \cdot 2^{-\lfloor k/N \rfloor}$ . Здесь  $\lfloor a \rfloor$  — целая часть числа  $a$ . При достаточно большом  $h_0$  и  $N \geq 3\sigma^2 + 1$  выполняется неравенство

$$\|x_k - x^*\| \leq 2\sigma h_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Интенсивные исследования субградиентных методов в Институте кибернетики Академии наук Украинской Советской Социалистической Республики (в настоящее время — Институт кибернетики имени В.М. Глушкова Национальной академии наук Украины) проводились в 60–70-ые годы XX века. Параллельно они проводились учеными из других научных центров СССР, в частности, И.И. Ереминым (г. Свердловск; см., например, [27]) и Б.Т. Поляком (г. Москва) для решения задач выпуклого программирования с ограничениями. Результаты исследований

субградиентных методов, полученные в СССР, вызвали огромный интерес за рубежом, когда в них увидели ключ к решению задач большой размерности линейного и нелинейного программирования блочного типа.

Субградиентные методы недифференцируемой оптимизации, разработанные в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины под руководством Н.З. Шора, оказали огромное влияние на развитие теории и практики математического программирования.

Но при решении практических задач оказалось, что субградиентные методы сходятся медленно. Схема субградиентных методов чрезвычайно жесткая, и в общем случае они не могут сходить быстрее теоретических оценок. Поэтому исследования в этом направлении были продолжены, что привело к созданию **субградиентных методов с растяжением пространства**.

Приведем краткое описание группы методов с растяжением пространства, также созданных научной группой Н.З. Шора [63, 80].

На  $k$ -той итерации субградиентного метода проводится замена переменных  $x = B_k y$ , где  $B_k$  – неособенная матрица размера  $n \times n$ . По определению субградиента функции  $f(x)$  в точке  $x_k$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq f(x_k) + g(x_k)(x - x_k).$$

После замены переменных получаем

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(y) \geq \varphi(y_k) + B_k^T g(x_k)(y - y_k),$$

где  $\varphi(y) = f(B_k y)$ . Ясно, что вектор  $g(y_k) = B_k^T g(x_k)$  является субградиентом выпуклой функции  $\varphi(y)$  в точке  $y_k = B_k^{-1} x_k$ .

Субградиентный метод в пространстве переменных  $y = B_k^{-1} x$  имеет вид

$$y_{k+1} = y_k - h_k \frac{g(y_k)}{\|g(y_k)\|} = y_k - h_k \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}$$

с шаговым множителем  $h_k$  в направлении нормированного антисубградиента.

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$x_{k+1} = B_k y_k - h_k B_k \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|} = x_k - h_k B_k \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}. \quad (1.11)$$

Если дополнить формулу (1.11) правилом рекуррентного пересчета матрицы

$$B_{k+1} = B_k T_k, \quad (1.12)$$

где  $T_k$  – матрица размера  $n \times n$ , то получится  $k$ -я итерация субградиентного метода с последовательным преобразованием пространства переменных.

Под руководством Н.З. Шора в 1969–1971 гг. были разработаны два семейства субградиентных методов с растяжением пространства. Оператор растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  в направлении  $\xi$  имеет следующий вид [78]:

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi\| = 1, \quad \alpha > 1,$$

где  $I_n$  – единичная матрица размера  $n \times n$ . В (1.12) в качестве матрицы  $T_k$  берется обратный к оператору растяжения  $R_\alpha(\xi)$  оператор

$$R_\beta(\xi) = I_n + (\beta - 1)\xi\xi^T, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

В первом семействе методов растяжение пространства производится в направлении субградиента. Приближение решения рассчитывается по формуле

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\xi_k), \quad \xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Если субградиент  $g(x_k)$  близок к 0 с требуемой точностью, то  $x_k$  – точка минимума функции  $f(x)$  и происходит остановка процесса (1.13).

При использовании дополнительной информации о целевой функции  $f(x)$  можно построить определенные варианты субградиентного метода

с растяжением пространства в направлении субградиента, которые сходятся по функционалу со скоростью геометрической прогрессии по отклонению достигнутого значения  $f(x_k)$  от оптимального  $f(x^*)$ . Причем знаменатель этой прогрессии зависит от инвариантных по отношению к невырожденным линейным преобразованиям пространства свойств целевой функции.

**Теорема 1.7.** [78] Пусть  $f(x)$  – выпуклая функция, определенная на  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^*$  – точка минимума  $f(x)$ , и в некоторой сферической окрестности  $S_d = \{x \mid \|x - x^*\| \leq d\}$  точки  $x^*$  субградиент удовлетворяет неравенствам

$$N(f(x) - f(x^*)) \leq g(x)(x - x^*) \leq M(f(x) - f(x^*)),$$

где  $M$  и  $N$  – некоторые положительные константы, так называемые постоянные роста функции  $f(x)$ , причем  $M \geq N$ . Тогда если в методе (1.13) принять

$$x_0 \in S_d, h_k = \frac{2MN}{M+N} \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|B_k^T g(x_k)\|}, \alpha_k = \frac{M+N}{M-N},$$

то последовательность  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  удовлетворяет неравенству

$$\|B_k^{-1}(x_k - x^*)\| \leq d, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Из неравенства (1.14) следует, что точка  $x^*$  локализована в эллипсоиде  $\Phi_k = \{x \mid \|B_k^{-1}(x_k - x)\| \leq d\}$  с центром в точке  $x_k$ . Отношение объемов эллипсоидов  $\Phi_{k+1}$  и  $\Phi_k$  задается равенством

$$\frac{V(\Phi_{k+1})}{V(\Phi_k)} = \beta_k = \frac{M-N}{M+N}.$$

Видно, что сходимость со скоростью геометрической прогрессии обеспечивает выполнение неравенства (1.14), по которому объем эллипсоида локализации оптимума убывает в геометрической прогрессии со знаменателем  $\frac{M-N}{M+N}$ .

Во втором семействе субградиентных методов с растяжением пространства переменных, разработанных под руководством Н.З. Шора в 1969–1971 гг., растяжение пространства происходит в направлении разности двух последовательных субградиентов. В [63] приводится следующее обоснование необходимости разработки этого семейства методов:

«Опыт применения алгоритмов с растяжением пространства в направлении субградиента показал существенное ускорение субградиентных процессов. Однако оказалось, что такие методы в принципе не могут быть монотонными. Это связано с простым геометрическим фактом: если находиться на границе двух «кусков» кусочно-гладкой поверхности уровня, а градиенты к этим гладким «кускам», вычисленные в данной точке, образуют тупой угол, то никакое растяжение пространства в направлении градиентов не может преобразовать этот угол в острый, он может лишь приближаться к  $\pi/2$ , оставаясь тупым. Применяя растяжение пространства в направлении субградиента, невозможно получить направление убывания функции в виде антиградиента к одному из кусков в растянутом пространстве. В то же время растяжение пространства в направлении разности двух указанных градиентов с достаточным коэффициентом растяжения преобразует тупой угол между градиентами в острый, т. е. соответствующие образы этих антиградиентов в растянутом пространстве становятся направлениями убывания функции.»<sup>3</sup>

Второе семейство субградиентных методов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов получило название ***r*-алгоритмов** (от слова «разность»).

Приведем описание *r*-алгоритмов для минимизации выпуклой функции  $f(x)$ , определенной в  $\mathbb{R}^n$ . Корректность регулировки шага

---

<sup>3</sup>Цит. по [63, с. 12–13].

обеспечивает выполнение условия  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

**Определение 1.10.** [63]  *$r$ -алгоритмом называется процедура построения последовательностей  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$  по следующему правилу:*

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.15)$$

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k), \quad (1.16)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \quad r_k = g(x_{k+1}) - g(x_k), \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1. \quad (1.17)$$

Здесь  $x_0$  — начальное приближение,  $B_0$  — единичная  $n \times n$ -матрица,  $h_k$  — шаговый множитель,  $\alpha_k$  — коэффициент растяжения пространства,  $g(x_k)$  и  $g(x_{k+1})$  — произвольные субградиенты функции  $f(x)$  в точках  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Если  $g(x_k) = 0$ , то  $x_k$  является точкой минимума функции  $f(x)$ , и процесс (1.15)–(1.17) останавливается.

В настоящее время проблема обоснования сходимости  $r$ -алгоритмов для всего класса выпуклых функций остается открытой.

Модификации  $r$ -алгоритма успешно используются в задачах линейного и нелинейного программирования, блочных задачах с различными схемами декомпозиции, для вычисления двойственных лагранжевых оценок в многоэкстремальных и комбинаторных задачах оптимизации. Также  $r$ -алгоритмы стали центральными методами в системах поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований на основе семейства оптимизационных межотраслевых моделей с переменными коэффициентами прямых затрат [62].

Близкими к группе субградиентных методов являются так называемые  **$\varepsilon$ -субградиентные методы**. Данная группа методов

была предложена сначала в виде алгоритмов, аналогичных алгоритму градиентного спуска, для минимаксных задач [24, 47].

Понятие  $\varepsilon$ -субградиента (в англоязычной литературе более употребимое название – **приближенный субградиент**) было введено на ранних этапах развития выпуклого анализа [61, 89] и является обобщением понятия субградиента. Идея данного понятия оказалась одной из фундаментальных для негладкой оптимизации.

**Определение 1.11.** Вектор  $g \in \mathbb{R}^n$  называется  $\varepsilon$ -субградиентом выпуклой функции  $f(x)$  в точке  $x_0 \in \text{dom } f$ , если выполняется соотношение  $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) - f(x_0) \geq g(x - x_0) - \varepsilon$ . Здесь  $\varepsilon \geq 0$  – некоторое фиксированное число.

**Определение 1.12.** Множество  $\partial_\varepsilon f(x_0)$  всех  $\varepsilon$ -субградиентов для функции  $f$  в точке  $x_0$  называется  $\varepsilon$ -субдифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Из определений следует, что  $\partial f(x) = \partial_0 f(x)$ ,  $\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon f(x)$ . Существенной особенностью  $\varepsilon$ -субдифференциального отображения как многозначной функции  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  и  $x \in \mathbb{R}^n$  является его нелокальный характер. Значение этого отображения в некоторой точке зависит от поведения функции  $f$  во всей области ее определения. В [48] доказана справедливость и обратного утверждения — поведение  $\partial_\varepsilon f(x)$  в фиксированной точке  $x$  определяет глобальное поведение функции  $f$ .

**Определение 1.13.**  $\varepsilon$ -субградиентным методом называется процедура построения последовательности  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  по правилу

$$x_{k+1} = x_k - \gamma^k \frac{g_{\varepsilon^k}(x_k)}{\|g_{\varepsilon^k} f(x_k)\|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.18)$$

$$\gamma^k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \infty, \quad \varepsilon^k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где  $x_0$  – начальное приближение,  $\gamma^k$  – шаговый множитель,  $g_{\varepsilon^k}(x_k) \in \partial_{\varepsilon^k} f(x_k)$  –  $\varepsilon$ -субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x = x_k$ ,

отвечающий  $\varepsilon = \varepsilon^k$ .

Сходимость методов типа (1.18) доказана в следующей теореме.

**Теорема 1.8.** [48] Пусть последовательность  $\{x_k\}$  ограничена. Тогда все ее предельные точки принадлежат множеству  $\{x^* \mid f(x^*) = \min_{x \in \text{dom } f} f(x)\}$ .

Эффективность методов типа (1.18) невелика, и им присущи те же недостатки, что и градиентным методам, — большая чувствительность к обусловленности задачи и невысокая скорость сходимости. К положительным свойствам  $\varepsilon$ -субградиентных методов относится их устойчивость по отношению к помехам вычислений. Дальнейшие усовершенствования и теоретические обоснования  $\varepsilon$ -субградиентных алгоритмов сделаны в [48].

**1.3.2. Метод центров тяжести и метод эллипсоидов** Еще одной важной отправной точкой развития выпуклой оптимизации в 60-тые годы XX века стал предложенный А.Ю. Левиным метод центров тяжести [38]. Независимо от А.Ю. Левина метод центров тяжести в США разработал Д. Ньюман [134].

Данный метод является первым представителем семейства методов **секущих плоскостей**.

Пусть  $M_0$  — политоп в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{int } M_0 \neq \emptyset$ , и  $f : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция. Определим *центр тяжести*  $c_0$  множества  $M_0$  следующим образом:

$$c_0 = \frac{1}{\text{vol}_n M_0} \int_M x \, dx,$$

где  $\text{vol}_n M$  —  $n$ -мерный объем множества  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Следующая теорема показывает, что любая отсекающая плоскость, проходящая через центр тяжести множества, разделяет его на две

пропорциональные части.

**Теорема 1.9.** [45] Пусть  $g$  задает некое направление в  $\mathbb{R}^n$  и  $c$  – центр тяжести выпуклого ограниченного множества  $M$ . Определим

$$M_+ = \{x \in M \mid g(c - x) \geq 0\}.$$

Тогда

$$\frac{\text{vol}_n M_+}{\text{vol}_n M} \leq 1 - \frac{1}{e}.$$

Для решения задачи  $\varepsilon$ -минимизации функции  $f$ , т.е. нахождения точки  $x_0 \in M_0$  такой, что  $f(x_0) - 2\varepsilon \leq \min_{x \in M_0} f(x)$ , предлагается следующий алгоритм.

Найти центр тяжести  $c_0$  политопа  $M_0$ . Затем получить  $(n-1)$ -мерную плоскость, разделяющую  $M_0$  на два политопа, только один из которых, скажем,  $M_1$ , содержит искомую точку минимума функции  $f$ . Повторить то же самое для политопа  $M_1$ , найдя его центр тяжести  $c_1$ , и т.д. Повторять эти шаги до тех пор, пока ширина политопа  $M_k$  не станет меньше  $2\varepsilon/L$ , где  $L$  – константа Липшица для функции  $f(x)$ . Затем рассмотреть  $(n-1)$ -мерный политоп  $M_{k+1}$ , такой, что расстояние от любой точки  $M_k$  до  $M_{k+1}$  не превосходит  $\varepsilon/L$ . Применить предыдущий (но уже  $(n-1)$ -мерный) алгоритм к  $M_{k+1}$ .

Этот метод представляет только теоретический интерес, поскольку включает трудоемкую операцию нахождения центра тяжести  $n$ -мерного многогранника на каждой итерации. Вычисление центра тяжести многогранника в многомерном пространстве является не менее сложной задачей, чем решение исходной задачи минимизации. Теоретический интерес метод центров тяжести имеет, поскольку позднее было доказано, что он является неулучшаемым (т.е. оптимальным) по своим характеристикам относительно порядка сходимости среди всех методов негладкой выпуклой оптимизации, которые используют только

значения субградиента. Метод центров тяжести сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой зависит лишь от размерности пространства (см. параграф 1.3.3).

**Метод эллипсоидов**, впервые предложенный Д.Б. Юдиным и А.С. Немировским [83] в 1974–1976 гг.<sup>4</sup> и независимо переоткрытый Н.З. Шором [77] в 1977 г., является частным случаем методов с растяжением пространства в направлении субградиента [63] и, одновременно, улучшенной в плане практической реализуемости версией метода центров тяжести. В методе эллипсоидов трудоемкая задача нахождения центра тяжести многогранника заменена тривиальной задачей нахождения центра описанного эллипсоида. Платой за простоту итерации оказалось снижение скорости сходимости – метод эллипсоидов сходится со скоростью порядка  $O(n^2 \ln \frac{1}{\varepsilon})$ , которая хуже оптимальной [42]. Объем эллипсоида, в котором локализуется точка оптимума, убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, зависящим только от размерности пространства переменных. От свойств целевой функции знаменатель прогрессии не зависит. Это свойство метода эллипсоидов сыграло свою роль в развитии теории сложности задач математического программирования. На основе метода эллипсоидов был получен и обоснован первый полиномиальный алгоритм решения задачи линейного программирования [67]. Так был решен долгое время оставшийся открытым вопрос, является ли задача ЛП  $NP$ -сложной или нет.

**1.3.3. Оптимальные алгоритмы** В цикле публикаций 1976-1979 гг. А.С. Немировским и Д.Б. Юдиным было введено новое понятие *сложности задач оптимизации* и получены предельно возможные скорости сходимости (не асимптотической) для методов минимизации

---

<sup>4</sup>История открытия изложена в [152].

на различных классах задач. Итоги данных исследований обобщены в монографии [42].

Данный подход заключается в следующем. Рассмотрим определенный класс задач оптимизации, снабженных **оракулом**, т.е. некоторым источником информации о задаче. Оракул проще всего представить в виде некоторого устройства, которое отвечает на вопросы численного метода. В терминах computer science оракул — это процедура-функция, выходные параметры которой являются нужной информацией. Например, для класса задач безусловной минимизации негладкой выпуклой функции оракул первого порядка дает значение минимизируемой функции в любой точке и значение одного из субградиентов в этой точке. Далее Немировский и Юдин установили нижние границы оценки сложности методов, пользующихся только оракулом, для различных классов задач оптимизации. Так, например, для упомянутого класса задач негладкой выпуклой оптимизации оказалось, что не существует метода, который сходится быстрее, чем со скоростью порядка  $O(q^{\frac{k}{n}})$ , где  $q < 1$  — абсолютная константа. Также ни у одного метода оценка скорости сходимости, равномерная по размерности пространства  $n$ , не может быть лучше, чем порядка  $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$ , где  $k$  — число итераций метода. Доказано, что такими скоростями сходимости обладают соответственно метод центров тяжести и субградиентный метод. Таким образом, два самых первых метода, разработанные для решения задач негладкой минимизации, оказались неулучшаемыми по своим скоростным характеристикам. Однако следует отметить, что данные утверждения о скорости сходимости этих методов верны *равномерно* по размерности пространства переменных. Для задач умеренной размерности можно разработать более эффективные схемы [45].

В 80-е годы XX века теорию эффективных методов оптимизации активно развивал Ю.Е. Нестеров; см. [43, 44].

**1.3.4. Методы с полной информацией (bundle-методы и гибридные модели)** Более гибкие алгоритмические схемы, чем субградиентные методы и метод эллипсоидов, основаны на понятии *модели* негладкой функции.

**Определение 1.14.** [45] Пусть  $X = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  – некоторая последовательность точек из множества  $Q$ . Функция

$$\hat{f}_k(X; x) = \max_{0 \leq i \leq k} \{f(x_i) + g_i(x - x_i)\},$$

где  $g_i \in \partial f(x_i)$  – некоторые субградиенты функции  $f$  в точках  $x_i$ , называется моделью выпуклой функции  $f(x)$ .

Последующая модель всегда улучшает предыдущую и аппроксимирует  $f(x)$  снизу:

$$f(x) \geq \hat{f}_{k+1}(X; x) \geq \hat{f}_k(X; x)$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Метод секущих плоскостей**, также известный как метод Келли [94, 110], является простейшим из методов минимизации, основанном на использовании полной информации о функции  $f$  – ее модели  $\hat{f}_k(X; x)$ . На  $k$ -й итерации метода Келли ищется  $x_{k+1} \in \underset{x \in Q}{\text{Arg min}} \hat{f}_k(X; x)$ .

На практике метод Келли неприменим из-за его численной неустойчивости — множество  $\underset{x \in Q}{\text{Arg min}} \hat{f}_k(X; x)$  может оказаться неустойчивым по отношению к произвольно малому изменению данных  $\{f(x_i), g_i \in \partial f(x_i)\}$  (см., например, [42]).

Следующим этапом развития методов с полной информацией стало появление так называемых **bundle-методов**<sup>5</sup> [101, 111, 114–116, 121, 156]<sup>6</sup> (bundle – пучок). Эти методы, в отличие от методов семейства секущих плоскостей, являются одновременно и релаксационными, и

<sup>5</sup>В русскоязычной литературе пока не появился общепризнанный термин для этого семейства методов.

<sup>6</sup>Методы сопряженных субградиентов [156] и [115], одновременно появившиеся в 1975 году в

устойчивыми. Кроме построения модели  $\hat{f}$  целевой функции  $f$ , строится еще полиэдральная аппроксимация субдифференциала  $\partial\hat{f}$ .

Идея простейших схем bundle-методов состоит в следующем. На  $k$ -й итерации ищется

$$x_{k+1} = \arg \min_Q \left\{ \hat{f}_k + \frac{1}{2} d_k \|x - x_k^+\|^2 \mid x \in Q \right\},$$

где  $x_k^+$  – центр регуляризации, определенная точка из множества  $\{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $d_k$  – текущий штрафной параметр. Точка  $x_{k+1}$  выбирается как некоторое компромиссное решение между необходимостью уменьшить модель функции:

$$\hat{f}_k(x_{k+1}) < \hat{f}_k(x_k^+) \quad (1.19)$$

и сохранить достаточно близкое расстояние до «перспективной» точки – центра регуляризации, так что следующее значение

$$\|x_{k+1} - x_k^+\|^2 \text{ достаточно близко к } 0. \quad (1.20)$$

Если выполняется условие (1.19), то в качестве  $x_{k+1}^+$  можно взять  $x_{k+1}$ , иначе оставить  $x_{k+1}^+ = x_k^+$ . Таким образом, модель целевой функции накапливает всю полученную информацию об  $f$ , а наличие штрафного параметра уменьшает влияние погрешности модели, тем самым увеличивая устойчивость. Самый простой вариант выбора штрафного параметра  $d_k \equiv 1$  на практике оказывается непригодным [112].

Bundle-методы оказались эффективными при практическом применении, если правила пересчета центра регуляризации  $x_k^+$  и варианты подстройки штрафного параметра  $d_k$  выбраны удачно. Но эти правила пересчета, успешные для одних практических задач, могут совсем не подходить для других задач.

---

Mathematical Programming Studies, по сути являются первыми bundle-методами, основанными на улучшении метода секущих плоскостей. Но данная прямая интерпретация, позволяющая объединить методы, появилась гораздо позднее.

В **проксимальном bundle-методе** [112, 120] минимизации выпуклых функций для решения задачи (1.20) используется следующая процедура одномерного поиска. Пусть  $m_L \in (0, \frac{1}{2})$  – некоторый фиксированный параметр. Для наибольшего числа  $t_L^k \in [0, 1]$  такого, что

$$f(x_k + t_L^k d_k) \leq f(x_k) + m_L t_L^k v_k,$$

где  $v_k = \hat{f}_k(x_k + d_k) - f(x_k) < 0$ , обновить  $x_{k+1}$  по следующей формуле:

$$x_{k+1} = x_k + t_L^k d_k.$$

При определенных условиях метод сходится с линейной скоростью [144].

Сверхлинейную скорость сходимости показывает **bundle-метод квазиньютоновского типа** [118] (только для сильно выпуклых функций), но оракул для этого метода помимо значения целевой функции и какого-то субградиента в точке должен возвращать и матрицу, аппроксимирующую гессиан, что является существенным ограничением для применения данного метода.

**Метод уровней** [117], появившийся в 1995 году, был разработан на основе bundle-методов. Введем следующие обозначения:

- минимальное значение модели –

$$\hat{f}_k^* = \min_{x \in Q} \hat{f}_k(X; x); \quad (1.21)$$

- рекордное значение модели –

$$f_k^* = \min_{0 \leq i \leq k} f(x_i); \quad (1.22)$$

- $l_k(\alpha) = (1 - \alpha)\hat{f}_k^* + \alpha f_k^*$ , где  $\alpha$  – некоторое число из интервала  $(0, 1)$ .

Рассмотрим выпуклое и замкнутое множество уровней

$$L_k(\alpha) = \{x \in Q \mid f_k(x) \leq l_k(\alpha)\}.$$

Алгоритм метода уровней выглядит следующим образом.

*Шаг 0.* Выбрать точку  $x_0 \in Q$ , точность  $\varepsilon > 0$  и коэффициент уровня  $\alpha \in (0, 1)$ .

*Шаг 1.* Вычислить  $\hat{f}_k^*$  и  $f_k^*$ , решив задачи (1.21), (1.22).

*Шаг 2.* Если  $f_k^* - \hat{f}_k^* \leq \varepsilon$ , то завершить работу алгоритма. Иначе перейти к *Шагу 3*.

*Шаг 3.* Взять в качестве  $x_{k+1}$  проекцию точки  $x_k$  на  $L_k(\alpha)$ .

В данной схеме имеются две трудоемкие операции – вычисление  $\hat{f}_k^*$  на *Шаге 1* и нахождение проекции точки  $x_k$  на множество  $L_k(\alpha)$ . Если  $Q$  – многогранник, то первая задача является задачей ЛП:

$$\min t \tag{1.23}$$

$$\text{при } f(x_i) + g(x_i)(x - x_i) \leq t, \quad i = 0, \dots, k; \quad x \in Q.$$

Задача вычисления проекции для многогранника  $Q$  является задачей квадратичного программирования:

$$\min \|x - x_k\|^2 \tag{1.24}$$

$$\text{при } f(x_i) + g(x_i)(x - x_i) \leq l_k(\alpha), \quad i = 0, \dots, k; \quad x \in Q.$$

Обе задачи (1.23), (1.24) эффективно решаются стандартными алгоритмами типа симплекс-метода или методами внутренней точки.

Заметим, что рекордные значения модели убывают, а ее минимальные значения возрастают:

$$\hat{f}_k^* \leq \hat{f}_{k+1}^* \leq \min_{x \in Q} f(x) \leq f_{k+1}^* \leq f_k^*.$$

Следующая теорема дает оценку эффективности метода уровней.

**Теорема 1.10.** [45] Пусть  $\text{diam } Q = D$ . Тогда схема метода уровней останавливается не позднее чем через

$$N = \left\lfloor \frac{M_f^2 D^2}{\varepsilon^2 \alpha (1 - \alpha)^2 (2 - \alpha)} \right\rfloor + 1$$

итераций, где  $M_f = \max\{\|g\| \mid g \in \partial f(x), x \in Q\}$ . Критерий остановки метода гарантирует выполнение неравенства  $f_k^* - \min_{x \in Q} f(x) \leq \varepsilon$ .

Оптимальное значение уровня можно получить из следующей задачи максимизации:

$$\max_{\alpha \in [0, 1]} (1 - \alpha)^2 (1 - (1 - \alpha)^2).$$

Ее решение  $\alpha^* = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ .

Метод уровней является оптимальным равномерно по размерности пространства переменных. Граница аналитической сложности этого метода в конечномерном случае неизвестна.

Одно из преимуществ метода уровней заключается в том, что разность  $f_k^* - \hat{f}_k^*$  дает точную оценку достигнутой точности. Обычно данная разность стремится к нулю намного быстрее, чем в наихудшем случае. Для большинства реальных задач оптимизации точность  $\varepsilon = 10^{-4} - 10^{-5}$  достигается после  $3n - 4n$  итераций данного метода [45]. Но теоретически оптимальность метода гарантируется лишь при невысоких требованиях к точности [64].

Из последних работ в области bundle-методов можно отметить идею расщепления на подпространства гладкости и негладкости  $U$  и  $V$ , названную **VU-алгоритм** [122]. Название алгоритма произошло от попыток представить график функции в окрестности оптимальной точки в  $V$ -форме (негладкой кусочно-линейной) или в  $U$ -форме (близкой к гладкой квадратичной). Данный алгоритм показал сверхлинейную скорость сходимости, но за эту скорость приходится расплачиваться сложностью отдельных итераций – на каждой итерации требуется дополнительно решать две задачи квадратичного программирования.

Также в последнее десятилетие появились так называемые гибридные методы, сочетающие в своих алгоритмах свойства bundle-методов с идеями и возможностями других многошаговых методов НДО. К таким методам можно отнести **bundle-метод с ограниченной памятью LMBM** [104] для решения задач большой размерности, являющийся гибридом

bundle-методов переменной метрики [119] и методов переменной метрики с ограниченной памятью [93]. При этом метод [119] предназначен для решения негладких оптимизационных задач малой и средней размерности, а метод [93] – для решения гладких оптимизационных задач большой размерности. Направление поиска в методе LMBM задается формулой  $d_k = -D_k \tilde{g}_k$ , где  $D_k$  – не вычисляемая явно аппроксимация матрицы, обратной к аналогу гессиана;  $\tilde{g}_k$  – либо один из субградиентов целевой функции в точке  $x_k$ , либо агрегатный вектор, представляющий собой выпуклую комбинацию вычисленных ранее субградиентов. Матрица  $D_k$  не хранится в явном виде ни на одной итерации метода, вместо нее в памяти хранится определенное число векторов (обычно небольшое), которые необходимы для вычисления матрицы переменной метрики (детали см. в [104]). Теоретическая скорость сходимости метода LMBM не изучена; практические исследования показали, что она может быть близка к линейной [109].

Одним из важнейших свойств bundle-методов является использование тех вычисленных на предыдущих итерациях субградиентов, которые являются релевантными для аппроксимации субдифференциала на текущей итерации. Определение такой «релевантности» субградиента особенно затруднительно в случае невыпуклости целевой функции, поэтому был предложен метод выборки градиентов (gradient sampling method) [92], в котором используется тот факт, что локально липшицевые функции почти всюду дифференцируемы (следовательно, можно вычислить определенное число градиентов в некоторой окрестности данной точки). Использование такой схемы в bundle-алгоритме приводит к **методу квазисекущих** [85] (quasisecant method). Вычислительные эксперименты [109] подтвердили, что метод квазисекущих эффективен для задач недифференцируемой невыпуклой оптимизации.

**Определение 1.15.** Вектор  $v(x, g, h) \in \mathbb{R}^n$  называется

квазисекущей длины  $h > 0$  в точке  $x \in \mathbb{R}^n$  в направлении  $g \in \{g \in \mathbb{R}^n \mid \|g\| = 1\}$  для локально липшицевой непрерывной функции  $f$ , если выполняется неравенство  $f(x + hg) - f(x) \leq hv^T g$ .

На  $k$ -ой итерации метода квазисекущих вычисляется вектор  $w_l = \arg \min_{w \in V_l(x)} \|w\|^2$ , где  $V_l(x)$  – множество всех квазисекущих, найденных ранее. Если норма  $\|w_l\|$  достаточно мала, то происходит переход на следующую итерацию, а в качестве текущего приближения к решению берётся тот же вектор  $x_{k+1} = x_k$ . Иначе направление поиска меняется на  $g_{l+1} = w_l / \|w_l\|$ . Если это направление является направлением убывания, то направление поиска найдено:  $d_k = g_{l+1}$ ,  $v_k = w_l$ . В противном случае вычисляется квазисекущая  $v_{l+1}(x, g_{l+1}, h)$ , множество (bundle)  $V_l(x)$  заменяется на множество  $V_{l+1}(x) = \text{conv}(\{V_l(x) \cup v_{l+1}(x, g_{l+1}, h)\})$ , и процедура поиска направления  $d_k$  продолжается. В [85] доказано, что данная процедура конечна. После нахождения направления  $d_k$  очередное приближение к решению задачи обновляется по стандартной формуле  $x_{k+1} = x_k + h_k d_k$ , где  $h_k$  – текущий размер шага.

К гибридным методам также относят методы, не требующие наличия субградиентного оракула. В **методе дискретного градиента** [86] субградиенты заменяются дискретными градиентами, для вычисления которых требуются только значения целевой функции. Замкнутое выпуклое множество дискретных градиентов является непрерывной аппроксимацией субдифференциала Кларка, и его можно использовать для вычисления направления уменьшения целевой функции. Доказательство данного факта см. в [84]. Так же, как и в bundle-методах, все предыдущие значения дискретных градиентов собирают для построения некоторой модели функции в «связку» (bundle). Практическое исследование метода дискретного градиента и сравнение его с другими методами НДО показало [109], что его применение перспективно для нахождения глобального минимума невыпуклой функции. В случае же решения задачи

выпуклой оптимизации данный метод на практике значительно уступает по эффективности всем упоминавшимся выше методам, использующим субградиентный оракул.

Главный недостаток методов с полной информацией, использующих модель целевой функции, – необходимость постоянного хранения в памяти вычислительного устройства и обновления информации о модели целевой функции. При этом затраты памяти возрастают линейно с увеличением количества итераций. Увеличение размерности решаемой задачи также существенно увеличивает требуемый дополнительно объем памяти.

В области методов НДО, не относящихся к оракульному типу, можно отметить специальную технику сглаживания с последующим применением градиентных схем гладкой минимизации [129] для негладких функций с определенной структурой [130].

Как видно из проведенного обзора, проблема увеличения скорости сходимости методов продолжает оставаться одной из важнейших проблем в теории и практике НДО. В данной работе, помимо прочего, предпринята попытка определенным образом приблизить решение этой проблемы. Обнадеживающие результаты с достижением квадратичной скорости сходимости алгоритмов достигнуты для одномерного случая (более подробно см. главу 3 данной работы). Глава 2 данной работы посвящена разработке метода отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенного для решения задач выпуклой недифференцируемой минимизации функций многих переменных. Идеализированные варианты семейства методов отделяющих плоскостей имеют сверхлинейную скорость сходимости.

## Глава 2. Метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями

### 2.1. Описание метода

Пусть  $x = \{x^1, \dots, x^n\}$  – вектор  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  с обычным скалярным произведением  $xy$ . В  $\mathbb{R}^n$  рассматривается задача безусловной выпуклой недифференцируемой оптимизации

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*), \quad (2.1)$$

где  $f(x)$  – выпуклая недифференцируемая функция. Пусть задача (2.1) имеет решение  $x^*$ , возможно, неединственное.

Необходимость решения задач такого рода часто возникает в различных областях — в технике, в механике, теории управления [97], экономике [82] и др. (см. также главу 4 данной работы). Таким образом, существует огромное количество приложений методов решения задач типа (2.1). Кроме того, прогресс в области разработки и реализации методов минимизации негладких функций даст возможность построения более эффективных способов решения задач оптимизации большой размерности.

Настоящая глава посвящена разработке и исследованию нового эффективного метода решения задач типа (2.1) многомерной минимизации выпуклых недифференцируемых функций. Предложенный метод не требует дополнительной информации о внутренней структуре оптимизируемой функции и, следовательно, является представителем методов минимизации по типу черного ящика (black-box). Данный метод является результатом дальнейшего развития и усовершенствования методов типа [50, 139], имеющих ряд важных теоретических и вычислительных особенностей. Методы из семейства МОП основываются на идее замены исходной задачи минимизации на эквивалентную задачу

вычисления значения в точке  $g = 0$  соответствующей сопряженной функции Лежандра-Фенхеля для целевой функции задачи, что, как будет показано ниже, приводит к улучшению свойств сходимости.

Предполагается, что вся доступная информация о целевой функции  $f(x)$  задачи (2.1) предоставляется субградиентным оракулом, т.е. в произвольной точке  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  можно определить только значение функции  $f(\bar{x})$  и субградиент  $g \in \partial f(\bar{x})$ , произвольно выбранный из субдифференциала  $\partial f(\bar{x})$  функции  $f(x)$ .

Задача (2.1) эквивалентна задаче нахождения корня субдифференциального отображения  $0 \in \partial f(x^*)$  [23]. При этом выполняются следующие равенства:

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\sup_x \{0 \cdot x - f(x)\} = -f^*(0), \quad (2.2)$$

где  $f^*(g) = \sup_x \{gx - f(x)\}$  – функция, сопряженная (по Лежандру-Фенхелю) к  $f(x)$ . Таким образом, точка  $x^*$  удовлетворяет необходимым, а, следовательно, и достаточным условиям экстремума для задачи безусловной выпуклой минимизации. С другой стороны, задачу (2.2) можно интерпретировать как задачу нахождения самой нижней точки пересечения надграфика сопряженной функции  $\text{epi } f^* = \{(g, \mu) \mid g \in \mathbb{R}^n, \mu \geq f^*(g)\}$  с вертикальной прямой  $\{0\} \times \mathbb{R}_+$  (см. рис. 2.1).

Предполагается, что  $f(0) = 0$ , что может быть всегда достигнуто сдвигом системы координат. Чтобы избежать тривиальности, будем считать, не умаляя общности, что начало координат пространства прямых переменных  $x = 0$  решением задачи минимизации не является, т.е.  $f(x^*) < 0 = f(0)$ .

В методе отделяющих плоскостей (МОП) надграфик сопряженной функции  $f^*$  аппроксимируется внутренним и внешним образом выпуклыми полиэдральными множествами  $D$  и  $U$  (см. рис. 2.2). Так

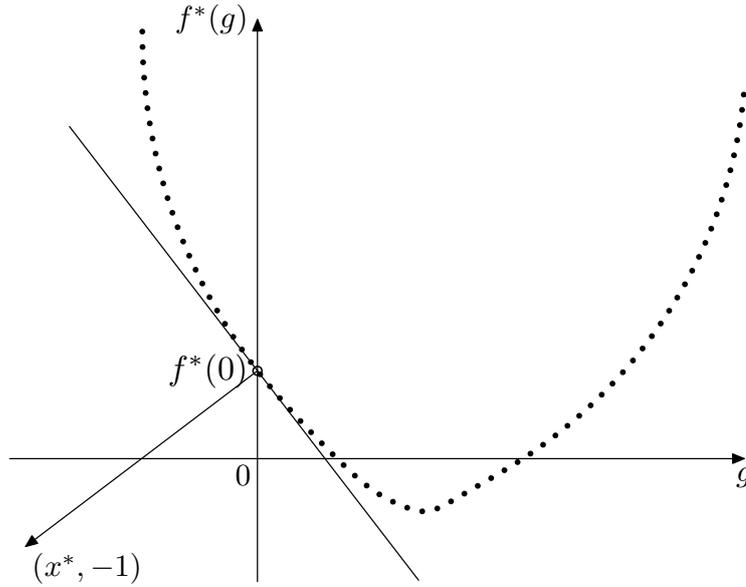


Рис. 2.1. Графическая интерпретация задачи (2.2). Точечная линия – график сопряженной функции  $f^*(g)$

же, как в bundle-методах, аппроксимации  $D \subset \text{epi } f^*$  и  $U \supset \text{epi } f^*$  строятся на основе собранной к началу  $k$ -той итерации информации о значениях  $f^*(g_i)$  и  $g_i \in \partial f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Эта информация фактически содержится в вычисляемой по ходу работы алгоритма последовательности точек  $\{x_i, f(x_i), g_i \in \partial f(x_i)\}_{i=1}^k$ , поскольку  $f^*(g_i) = g_i x_i - f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  в силу теоремы Фенхеля-Моро. Надграфик сопряженной функции  $\text{epi } f^*$  содержится в каждом из множеств  $H_i = \{(g, \varepsilon) \mid \varepsilon - g x_i \geq f^*(g_i) - g_i x_i = -f(x_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Кроме того,  $\text{epi } f^*$  содержит множество  $R_i = \{(g_1, f^*(g_1)), (g_2, f^*(g_2)), \dots, (g_i, f^*(g_i))\} + \{0\} \times \mathbb{R}_+$ . Тогда внешняя аппроксимация  $U$  на  $k$ -той итерации строится как  $U_k = \bigcap_{i=1, 2, \dots, k} H_i$ , а внутренняя аппроксимация  $D$  строится как  $D_k = \text{conv}(\{R_i, i = 1, 2, \dots, k\})$ . По мере вычисления новых точек  $(g_i, f^*(g_i))$  сопряженного пространства эти аппроксимации будут соответствующим образом уточняться, причем эту процедуру можно организовать так, чтобы, по крайней мере, одна из границ сходилась к

$f^*(0)$ .

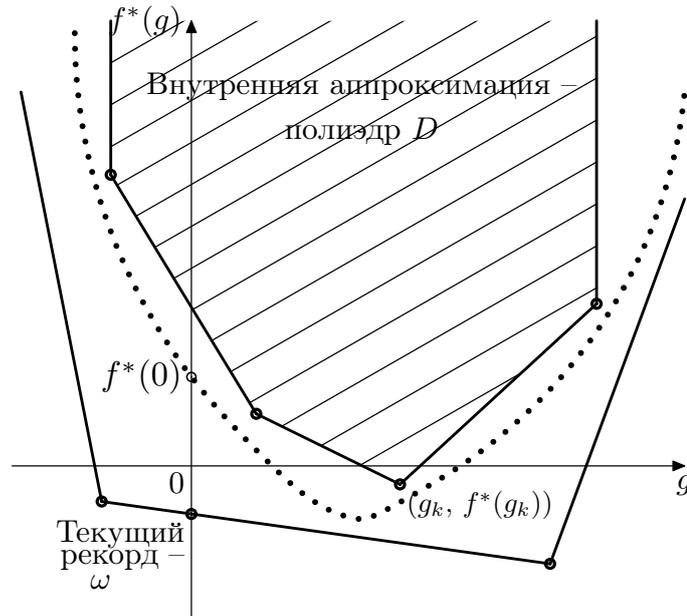


Рис. 2.2. Иллюстрация идеи стандартного метода отделяющих плоскостей

Модификация МОП, предлагаемая в данной главе, направлена на улучшение релаксационных свойств алгоритма и приводит, в частности, к повышению его вычислительной эффективности. Дело в том, что базовый вариант МОП не гарантирует монотонность по вычисляемым значениям целевой функции, особенно при подходе к экстремуму. Это не только затрудняет нахождение минимума, но и фактически замедляет сходимость метода. Для улучшения свойства монотонности метода предлагается ввести дополнительное отсечение по верхней оценке  $\bar{v}$  значения  $f^*(0)$ . Такое отсечение априори дополнительно локализует потенциальные точки надграфика  $f^*$ , которые будут в дальнейшем добавляться при уточнении его аппроксимации. В вычислительном плане значение  $\bar{v}$  может быть получено непосредственно из внутренней аппроксимации ер  $f^*$ :

$$\bar{v} = \min_{(0, \varepsilon) \in D} \varepsilon \geq \min_{(0, \varepsilon) \in \text{epi } f^*} \varepsilon = f^*(0) = -f(x^*) \geq \min_{(0, \varepsilon) \in U} \varepsilon,$$

что сводится к решению задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \min_{\tau} \tau = \\
&= \min_{\tau} \tau = \min_{\lambda \in \Delta_m} \sum_{k=1}^m \lambda_k f^*(g_k) = \\
&= \min_{\lambda \in \Delta_m} \sum_{k=1}^m \lambda_k f^*(g_k), \quad 0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k, \\
&= \max_x \min_{\lambda \in \Delta_m} \sum_{k=1}^m \lambda_k (f^*(g_k) - x g_k) = \\
&= \max_x \min_k \{f^*(g_k) - x g_k\} = \max_x \min_k \{x^k g_k - f(x^k) - x g_k\} = \\
&= - \min_x \max_k \{f(x^k) + (x - x^k) g_k\},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ;  $\Delta_m$  – стандартный симплекс  $\{\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, m; \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1\} = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1\}$ . Интересно отметить, что (2.3) представляет оценку, получаемую из метода секущих плоскостей Келли.

Обновления аппроксимаций на  $k$ -той итерации строятся с помощью построения гиперплоскости, отделяющей точку  $\omega_k$  – решение задачи минимизации  $\inf_{(0, \omega) \in U_k} \omega$  – и множество внутренней аппроксимации  $D_k$ . Эта плоскость фактически характеризует разницу между  $D_k$  и  $U_k$  в окрестности  $(0, f^*(0))$  и может быть естественным образом использована для их сближения (см. рис. 2.3). В силу выпуклости  $D_k$  такая гиперплоскость может быть построена с помощью ортогонального проектирования точки  $w_k$  на  $D_k$ . Детали представлены в описании алгоритма метода.

В модифицированном МОП решается задача построения опорной гиперплоскости к усеченному надграфику  $f^*$ :

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{(g, \varepsilon) \in \text{epi } f^* \\ \varepsilon \leq \bar{v}}} \{gx - \varepsilon\},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

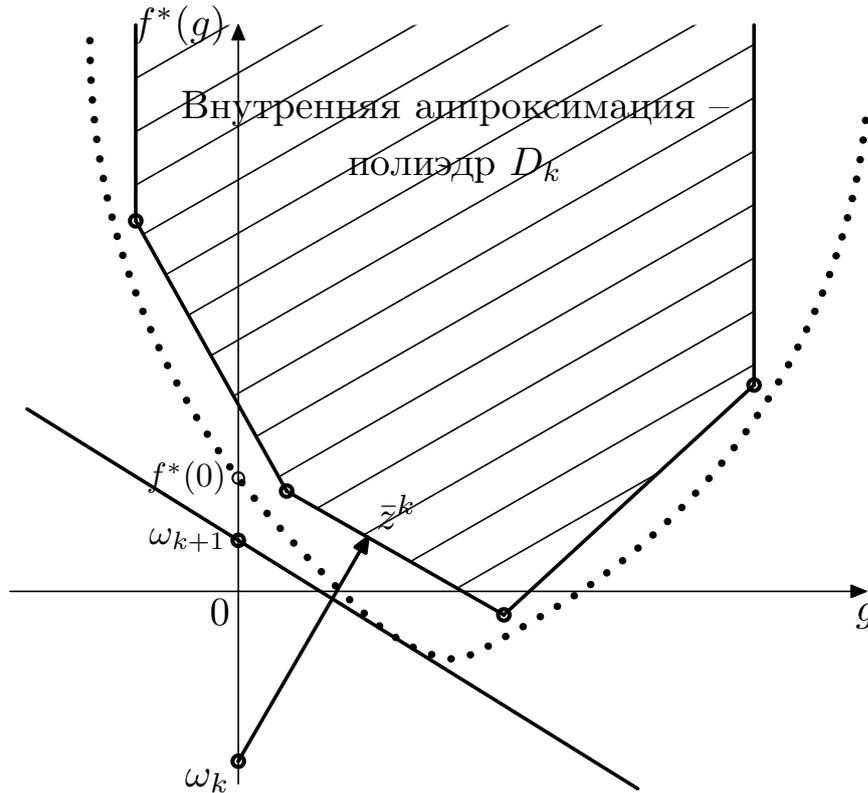


Рис. 2.3. Построение отделяющей гиперплоскости на  $k$ -й итерации метода отделяющих плоскостей

которая отличается от подзадачи оригинального МОП наличием дополнительного ограничения  $\varepsilon \leq \bar{v}$ . В этом плане алгоритм напоминает метод уровней [117], однако отличается тем, что построение аппроксимаций происходит в расширенном пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Рис. 2.4 иллюстрирует идею такого дополнительного отсечения.

Понятно, что множество  $\text{conv}(((g_k, f^*(g_k)), k = 1, 2, \dots) + \{0\} \times \mathbb{R}_+)$  содержится в  $\text{epi } f^*(g)$ .

Задачу (2.4), как и в стандартном МОП, легко перевести в пространство прямых переменных  $x \in \mathbb{R}^n$ , однако при этом появляется вспомогательная задача одномерной минимизации с достаточно неожиданной целевой функцией. Действительно, вводя

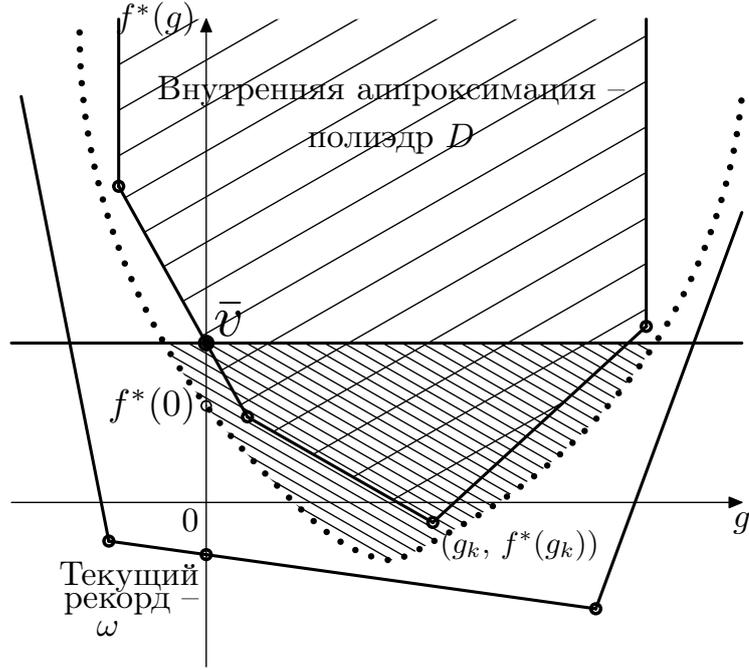


Рис. 2.4. Иллюстрация идеи МОП с дополнительными отсечениями

для дополнительного ограничения двойственную переменную  $\lambda$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \sup_{(g, \varepsilon) \in \text{epi } f^*; \varepsilon \leq \bar{v}} \{gx - \varepsilon\} &= \sup_g \inf_{\lambda \geq 0} \{gx - f^*(g) + \lambda(\bar{v} - f^*(g))\} = \\
 &= \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda \bar{v} + \sup_g \{gx - (\lambda + 1)f^*(g)\} \right\} = \\
 &= \inf_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda \bar{v} + (1 + \lambda) f\left(\frac{x}{1 + \lambda}\right) \right\} = \\
 &= -\bar{v} + \inf_{\lambda \geq 1} \left\{ \lambda \left( \bar{v} + f(\lambda^{-1}x) \right) \right\} = -\bar{v} + \inf_{\lambda \geq 1} \varphi(\lambda, x).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Легко показать, что функция  $\varphi(\lambda, x) = \lambda(f(\lambda^{-1}x) + \bar{v})$  выпукла по совокупности переменных  $(\lambda, x)$ . Докажем это утверждение. Оценку сверху для  $\varphi(\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2, \alpha x + (1 - \alpha)y)$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ , можно получить, используя неравенство Йенсена для  $f$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2, \alpha x + (1 - \alpha)y) &= \\
 &= (\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2) \left( f\left(\frac{\alpha x + (1 - \alpha)y}{\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2}\right) + \bar{v} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2) \left( f \left( \frac{\alpha\lambda_1}{\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2} \cdot \frac{x}{\lambda_1} + \frac{(1-\alpha)\lambda_2}{\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2} \cdot \frac{y}{\lambda_2} \right) + \bar{v} \right) \leq \\
&\leq \alpha\lambda_1 \left( f \left( \frac{x}{\lambda_1} \right) + \bar{v} \right) + (1 - \alpha)\lambda_2 \left( f \left( \frac{y}{\lambda_2} \right) + \bar{v} \right) = \\
&= \alpha\varphi(\lambda_1, x) + (1 - \alpha)\varphi(\lambda_2, y).
\end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\varphi(\lambda, x)$  выпукла по совокупности переменных  $(\lambda, x)$ , а, следовательно, и по переменной  $\lambda$ .  $\blacksquare$

Для решения задачи одномерной НДО (2.5) предложен быстрый алгоритм одномерного поиска, подробно описанный в **главе 3** данной работы. В благоприятных случаях быстрый алгоритм одномерного поиска демонстрирует сверхлинейную или даже квадратичную скорость сходимости. Для программной реализации МОП с отсечениями была создана отдельная реализация быстрого алгоритма одномерного поиска, рассмотренная в главе 3 данной работы. Обе реализации предложенных в работе численных методов (но не только они) входят в состав созданного автором комплекса программ. Быстрый алгоритм одномерного поиска так же, как и МОП с отсечениями, является методом оракульного типа, т.е. при каждом обращении к оракулу вычисляется значение функции  $\varphi(\lambda, x)$  и ее какого-либо субградиента.

Окончательно, **алгоритм** метода отделяющих плоскостей с отсечениями SPACLP выглядит следующим образом:

*Шаг 0. Инициализация.* Установить счётчик итераций  $k = 0$ , определить начальную точку минимизирующей последовательности  $x_0$  и др.

*Шаг 1.* Найти  $\inf_{0 \in U_k(\omega)} \omega = \omega_k$ , где  $U_k$  –  $k$ -я внешняя аппроксимация надграфика сопряженной функции  $f^*$ . Данную задачу можно решить рекуррентно:

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \inf_{0 \in U_k(\omega)} \omega = \inf_{0 \in U_{k-1}(\omega) \cap \{(g, \omega) \mid gx_{k-1} - \omega \leq f(x_{k-1})\}} \omega = \\
&= \max \left\{ \inf_{0 \in U_{k-1}(\omega)} \omega, \inf_{\omega \geq -f(x_{k-1})} \omega \right\} = \max \{ \omega_{k-1}, -f(x_{k-1}) \}, \quad k \geq 1. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

При этом можно считать, что  $\omega_0 = -\infty$ . Фактически  $-\omega_k$  является рекордом функции  $f$ , полученным за предыдущие  $k$  итераций.

*Шаг 2.* Найти вектор  $\bar{z}^k = (z^k, \xi_k)$  – проекцию точки  $(0, \omega_k)$  на полиэдр  $D_k$  внутренней аппроксимации надграфика сопряженной функции (см. рис. 2.5). Для решения данной задачи используется метод подходящих аффинных подпространств [49]. Данный конечный метод решает задачу нахождения вектора минимальной длины в полиэдре конечномерного евклидова пространства и обладает «лучше, чем линейной» глобальной скоростью сходимости. Другой возможный метод, который можно применить для решения задачи проекции, см. в [31].

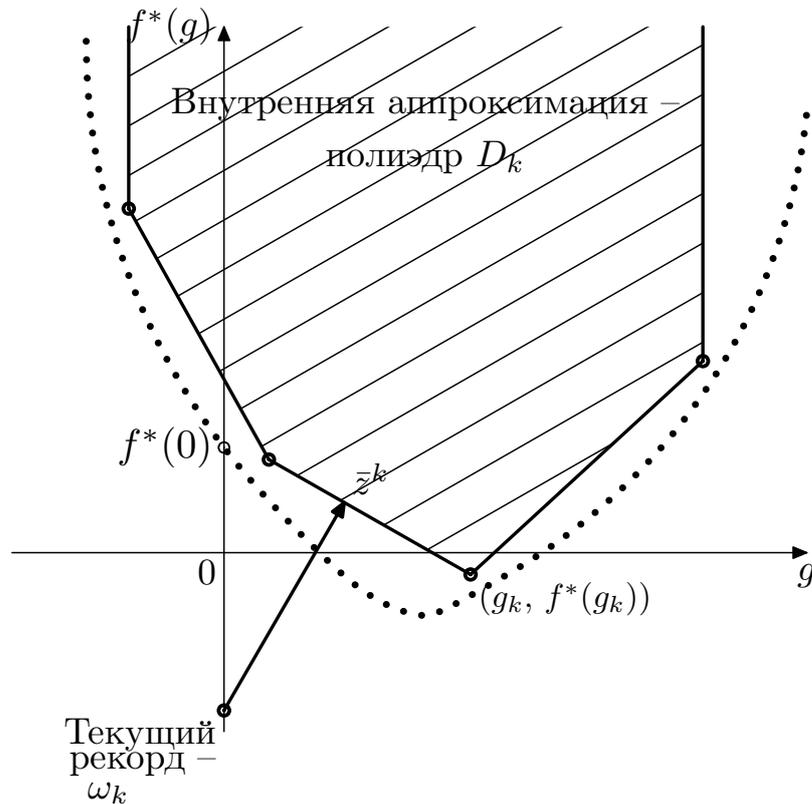


Рис. 2.5. Шаг 2 метода отделяющих плоскостей

*Шаг 3.* Вычислить очередное приближение к решению задачи (2.1):

$$x_k = -z^k / \xi_k.$$

При такой нормировке последняя компонента вектора

$\bar{x}^k = -\bar{z}^k / \xi_k = (x_k, -1)$  будет равна  $-1$ , что и требуется (см. рис. 2.1).

*Шаг 4.* Определить  $\bar{v}$  – уровень отсечения верхней части надграфика  $\text{epi } f^*$ , для чего решить задачу ЛП (2.3). Следует заметить, что такое отсечение не мешает решению задачи проекции *Шага 2* на  $D_k$ , и, следовательно, построению приближенного решения  $x_k$ .

Если задача (2.3) не имеет решения, перейти к *Шагу 7*.

*Шаг 5.* Решить задачу одномерной НДО (2.5).

При решении данной задачи возникает необходимость найти субградиент функции  $f(\theta x)$  по  $\theta$ . Как сказано выше, имеющийся оракул предоставляет, помимо значения целевой функции в точке, только какой-либо из субградиентов  $d(x)$  субдифференциала  $\partial f$  по  $x$ . Пользуясь формулой

$$d_x(\theta x)x = d_\theta(\theta x)\theta,$$

можно определить искомое значение  $d_\theta(\theta x)$ .

Пусть  $\lambda_k$  – найденное на  $k$ -й итерации решение данной задачи.

*Шаг 6.* Модифицировать приближение  $x_k$  по формуле:  $x_k = \lambda_k^{-1}x_k$ .

В алгоритме SPACIP, в отличие от МОП, при добавлении очередной точки в аппроксимацию  $\text{epi } f^*$ , субградиент оптимизируемой функции вычисляется не в тестируемой точке  $x$ , а в масштабируемой относительно  $x$  точке  $\lambda_k^{-1}x$ .

*Шаг 7.* Вычислить  $g_k \in \partial f(x_k)$ ,  $f^*(g_k) = g_k x_k - f(x_k)$ , добавить пару  $(g_k, f^*(g_k))$  к полиэдру  $D_k$ :  $D_{k+1} = \text{conv}(\{D_k, (g_k, f^*(g_k))\})$ .

*Шаг 8.* Если выполняется какое-либо из условий прекращения работы алгоритма, то завершить работу. Иначе увеличить на 1 счетчик итераций  $k$  и перейти к *Шагу 1*.

В следующих параграфах главы приведены доказательства сходимости данного алгоритма и результаты вычислительных экспериментов.

## 2.2. Сходимость метода

Сходимость алгоритма метода отделяющих плоскостей с отсечениями утверждается следующей теоремой.

**Теорема 2.1.** Пусть  $f(x)$  – конечная выпуклая функция,  $f(0) = 0$ ,  $\omega_* = -\min f(x) < \Omega < \infty$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \omega_*$ .

**Доказательство.** По индукции можно доказать, что  $\omega_k \leq f^*(0)$  для любого  $k$ .

В самом деле, это неравенство по определению выполняется для  $k = 0$ . Согласно (2.6),  $\omega_k = \max\{\omega_{k-1}, -f(x_{k-1})\}$ . Делая индуктивный переход и учитывая, что  $-f(x_{k-1}) = 0 \cdot x_{k-1} - f(x_{k-1}) \leq \sup_x \{0 \cdot x - f(x)\} = f^*(0)$ , получаем

$$\omega_k \leq \max\{f^*(0), f^*(0)\} = f^*(0),$$

что и требовалось доказать.

Поскольку  $\omega_k \leq f^*(0)$ , а  $\bar{z}_k + (0, \omega_k) \in \text{conv}(D_k) = D_k$ , то для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что  $\|\bar{z}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Для доказательства монотонного убывания нормы векторов  $\|\bar{z}_k\|$  необходимо рассмотреть несколько случаев.

1. Задача (2.3) на *Шаге 4* не имеет решения для всех  $k$ . Тогда МОП с дополнительными отсечениями превращается в стандартный МОП, и его сходимость доказана в [48].

2. Задача (2.3) на *Шаге 4* имеет решение. Обозначим через  $\bar{x}_k$  решение задачи (2.4),  $\bar{x}_k = \theta_k x_k$ ,  $0 < \theta_k \leq 1$ . Тогда вектор  $z_k$  представим в следующем виде:  $\bar{z}_k = -r_k(\theta_k x_k, -1)$ .

В зависимости от того, меняется ли на  $k$ -й итерации текущий рекорд целевой функции  $-\omega_k$ , возможны два варианта.

2.1.  $\omega_k = \omega_{k-1}$ . Тогда проекция выполняется из одной и той же

точки:  $\|\bar{z}_k\|^2 = \min_{z+(0, \omega_k) \in \text{conv}(D'_k)} \|z\|^2 = \min_{z+(0, \omega_{k-1}) \in \text{conv}(D'_{k-1})} \|z\|^2$ . Здесь  $D'_k$  – политоп, полученный на  $k$ -й итерации после отсечения (2.4).

При этом справедливо следующее неравенство:

$$\|\bar{z}_k\|^2 \leq \min_{\lambda \in [0, 1]} \|\bar{z}_{k-1} + \lambda((g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1})\|^2.$$

Решение задачи  $\min_{\lambda \in [0, 1]} \|\bar{z}_{k-1} + \lambda((g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1})\|^2$  есть проекция минимума одномерной квадратичной функции на интервал  $[0, 1]$ :

$$\lambda^* = \min \left\{ \left( \bar{z}_{k-1} - (g_k, f^*(g_k)) \right) \bar{z}_{k-1} / \|(g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1}\|^2, 1 \right\}.$$

Тогда для любого

$$\lambda \leq \frac{(\bar{z}_{k-1} - (g_k, f^*(g_k))) \bar{z}_{k-1}}{\|(g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1}\|^2} \quad (2.7)$$

выполняется

$$\|\bar{z}_k\|^2 \leq \|\bar{z}_{k-1} + \lambda((g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1})\|^2.$$

После возведения в степень:

$$\|\bar{z}_k\|^2 \leq \|\bar{z}_{k-1}\|^2 - 2\lambda \left( (\bar{z}_{k-1} - (g_k, f^*(g_k))) \bar{z}_{k-1} - \frac{\lambda}{2} \|(g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1}\|^2 \right). \quad (2.8)$$

Согласно (2.7),

$$\begin{aligned} & (\bar{z}_{k-1} - (g_k, f^*(g_k))) \bar{z}_{k-1} - \frac{\lambda}{2} \|(g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1}\|^2 \geq \\ & \geq \frac{\lambda}{2} \|(g_k, f^*(g_k)) - \bar{z}_{k-1}\|^2 > 0 \text{ при } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Для доказательства монотонного убывания в случае 2.1 нормы векторов  $\|\bar{z}_k\|$  достаточно в (2.8) учесть, что вычитаемое в правой части положительно по последнему неравенству:  $\|\bar{z}_k\|^2 < \|\bar{z}_{k-1}\|^2$ .

2.2.  $\omega_k = -f(x_{k-1}) > \omega_{k-1}$ .

Тогда

$$\|\bar{z}_k\|^2 = \min_{z+(0, \omega_k) \in \text{conv}(D'_k)} \|z\|^2 \leq \|\bar{z}_\lambda\|^2, \quad (2.9)$$

где  $\bar{z}_\lambda = \frac{\Omega - \omega_k}{\Omega - \omega_{k-1}} \bar{z}_{k-1} < \bar{z}_{k-1}$ .

Легко видеть, что при так определенном  $\bar{z}_\lambda$  последнее неравенство из (2.9) выполняется. Поэтому  $\|\bar{z}_k\|^2 < \|\bar{z}_{k-1}\|^2$ .

Из монотонности  $\|\bar{z}_k\|$  следует существование предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{z}_k\| = \rho$ .

Для доказательства того, что  $\rho = 0$ , предположим противное. Пусть  $\|\bar{z}_k\| \geq \tau r_k$  для некоторого  $\tau > 0$ .

Выполняется следующее равенство:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [((g_{k+1}, f^*(g_{k+1})) - (0, \omega_k)) \bar{z}_k - \|\bar{z}_k\|^2] = 0.$$

Действительно, предположим противное. Пусть для некоторой подпоследовательности  $((g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'})) \bar{z}_{k'} \leq \|\bar{z}_{k'}\|^2 - \gamma$ ,  $\gamma > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \|\bar{z}_{k'+1}\|^2 &= \min_{z + (0, \omega_{k'}) \in \text{conv}(\{(g_i, f^*(g_i)), i=0, 1, \dots, k'+1\}, (0, \Omega)\})} \|\bar{z}\|^2 \leq \\ &\leq \min_{z + (0, \omega_{k'}) = \lambda \tilde{g}_{k'} + (1-\lambda)(g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1}))} \|\bar{z}\|^2, \lambda \in [0, 1]. \\ &\text{Учитывая, что } \tilde{g}_{k'} = (0, \omega_{k'}) + \bar{z}_{k'}, \text{ получим} \end{aligned}$$

$$\|\bar{z}_{k'+1}\|^2 \leq \min_{\lambda \in [0, 1]} \|\lambda \bar{z}_{k'} + (1-\lambda)((g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'}))\|^2. \quad (2.10)$$

После возведения в квадрат правой части неравенства (2.10):

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_{k'+1}\|^2 \leq \min_{\lambda \in [0, 1]} \left\{ \lambda^2 \|\bar{z}_{k'}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda) \bar{z}_{k'} \cdot ((g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'})) + \right. \\ \left. + (1-\lambda)^2 \|(g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'})\|^2 \right\}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

После продолжения преобразований в правой части неравенства (2.11):

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_{k'+1}\|^2 &\leq \min_{\lambda \in [0, 1]} \left\{ \lambda^2 \|\bar{z}_{k'}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda) \|\bar{z}_{k'}\|^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \|(g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'})\|^2 \right\} = \\ &= \min_{\lambda \in [0, 1]} \left\{ (2\lambda - \lambda^2) \|\bar{z}_{k'}\|^2 - 2\gamma\lambda(1-\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\lambda)^2 \|(g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'})\|^2 \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Из (2.12) получена оценка:

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_{k'+1}\|^2 &\leq \min_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \|\bar{z}_{k'}\|^2 - 2\gamma\lambda(1-\lambda) + \right. \\ &+ (1-\lambda)^2 \left( \|(g_{k'+1}, f^*(g_{k'+1})) - (0, \omega_{k'})\|^2 - \|\bar{z}_{k'}\|^2 \right) \left. \right\} \leq \\ &\leq \|\bar{z}_{k'}\|^2 - 2\gamma\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2\delta^2 \text{ для любого } \lambda \in [0,1]. \end{aligned}$$

Если подставить в данное неравенство  $\lambda = (\delta^2 + \gamma)/(\delta^2 + 2\gamma) > 0$ , получим

$$\|\bar{z}_{k'+1}\|^2 \leq \|\bar{z}_{k'}\|^2 - \gamma^2/(\delta^2 + 2\gamma). \quad (2.13)$$

Переходя в (2.13) к пределу при  $k' \rightarrow \infty$ , получим противоречие. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [((g_{k+1}, f^*(g_{k+1})) - (0, \omega_k))\bar{z}_k - \|\bar{z}_k\|^2] = 0.$$

Так как  $0 \leq (\bar{z}_k + (0, \omega_k))\bar{z}_k - (g_{k+1}, f^*(g_{k+1}))\bar{z}_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то для достаточно больших  $k$  выполняется  $(\bar{z}_k + (0, \omega_k))\bar{z}_k - (g_{k+1}, f^*(g_{k+1}))\bar{z}_k \leq r_k^2\varepsilon^2$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} (0, \omega_{k+1})\bar{z}_k &\geq (g_{k+1}, f^*(g_{k+1}))\bar{z}_k \geq (0, \omega_k)\bar{z}_k + \|\bar{z}_k\|^2 - r_k\varepsilon \geq \\ &\geq (0, \omega_k)\bar{z}_k + r_k^2\tau^2 - r_k^2\varepsilon^2 \geq (0, \omega_k)\bar{z}_k + r_k^2\tau^2/2 \end{aligned}$$

для  $\varepsilon \leq \tau/\sqrt{2}$ . Т.е.  $r_k(0, \omega_{k+1}) \geq r_k(0, \omega_k) + r_k^2\tau^2/2$ .

Далее,  $f^*(0) \geq (0, \omega_{k+1}) \geq (0, \omega_k) + r_k\tau^2 \geq (0, \omega_k) + \delta$ , где  $\delta \geq r_k\tau^2 \geq 0$ , что невозможно при  $k \rightarrow \infty$ . Данное противоречие доказывает равенство  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{z}_k\| = 0$ . Теорема доказана.  $\blacksquare$

### 2.3. Вычислительные эксперименты

Реализованный метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями был протестирован на ряде задач недифференцируемой оптимизации, имеющих различные свойства. Также для проведения сравнительного тестирования данного метода и стандартного МОП последний тоже был реализован на языке программирования `octave` [140], свободно распространяемом матрично-векторном вычислителе, в значительной степени совместимом с MATLAB. Обе программы входят в

разработанный в диссертации комплекс программ (см. подробнее гл. 4). Результаты сравнительного тестирования см. в пп. 2.3.1, 2.3.2.

**2.3.1. Построение профилей производительности.** В качестве теста рассматривалась функция, в литературе известная под названием half-and-half function [123]:

$$f(x) = \sqrt{x^T A x} + x^T B x, \quad n = 8. \quad (2.14)$$

У диагональной матрицы  $A$  отличные от 0 элементы стоят только на нечетных местах по диагонали, и они все равны 1. Матрица  $B$  – диагональная с элементами  $B[i][i] = 1/i^2$ , где  $i = 1, \dots, 8$ . Начальная точка  $x_0$  выбиралась случайным образом.

С помощью стандартного МОП и МОП с дополнительными отсечениями была решена серия из 500 задач данного вида. Результаты сравнительного тестирования методов представлены на рис. 2.6–2.8.

Полученные во время тестирования результаты были обработаны по методике [99]. Эффективность методов оценивалась по количеству итераций, которое потребовалось реализациям этих методов для решения задачи.

Профилем производительности (performance profile [99])  $\rho_s$  для метода решения оптимизационной задачи называется функция распределения какого-либо измеримого показателя производительности. Вычисление профилей производительности позволяет визуализировать различия по эффективности нескольких оптимизационных методов.

Функция  $\rho_s(\tau)$  определяется следующим образом:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} |p \in P : r_{p,s} \leq \tau|; \quad r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s} : s \in S\}}. \quad (2.15)$$

Здесь  $S$  – множество сравниваемых методов,  $P$  – множество решаемых с помощью этих методов задач. Количество элементов в  $P$  обозначено

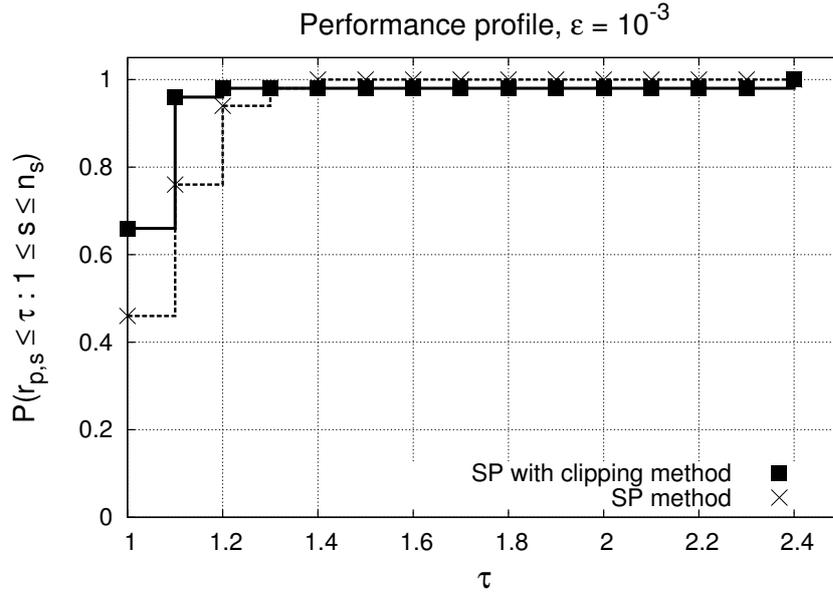


Рис. 2.6. Профили производительности для стандартного МОП и МОП с дополнительными отсечениями, целевая функция (2.14); заданная точность  $\varepsilon = 10^{-3}$

через  $n_p$ , соответственно,  $n_s$  – количество элементов в  $S$ . Для построения профилей производительности также была написана отдельная программа, входящая в разработанный в диссертации комплекс программ.

В данном случае  $n_s = 2$ ,  $n_p = 500$ . Для решенных в разделе задач в качестве измеримого показателя производительности  $t_{p,s}$  используется количество требуемых итераций метода.

Результаты сравнительного тестирования показывают, что при решении задач вида (2.14) МОП с дополнительными отсечениями более предпочтителен. Кроме того, превосходство одного метода над другим становится все более явным с увеличением необходимой точности решения.

**2.3.2. Функция MAXQUAD.** Далее, были выполнено тестирование с целевой функцией под названием MAXQUAD function [136]:

$$f(x) = \max \{x^T B_k x + b_k x \mid k = 1, \dots, 5\},$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 10; \quad (2.16)$$

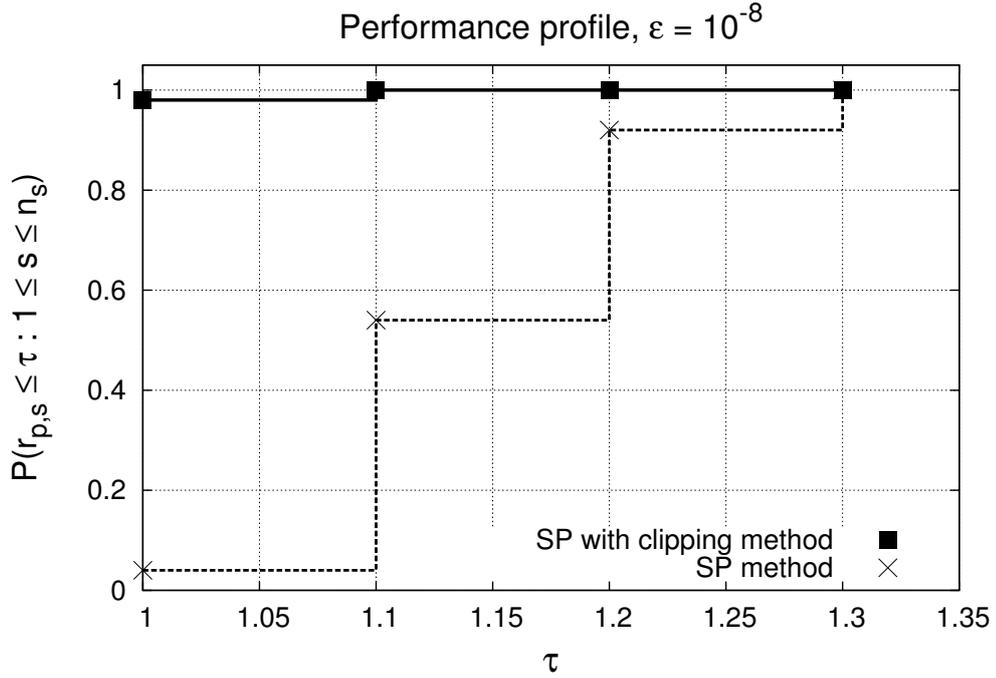


Рис. 2.7. Профили производительности для стандартного МОП и МОП с дополнительными отсечениями, целевая функция (2.14); заданная точность  $\varepsilon = 10^{-8}$

где

$$B_k[i][j] = e^{i/j} \cos(i j) \sin(k), \quad i < j;$$

$$B_k[i][i] = \frac{i}{n} |\sin(k)| + \sum_{j \neq i} |B_k[i][j]|;$$

$$b_k[i] = e^{i/k} \sin(i k).$$

Матрицы  $B_k$  являются симметрическими. Как известно, симметрическая матрица с диагональным преобладанием и действительными неотрицательными элементами по главной диагонали является положительно полуопределенной.

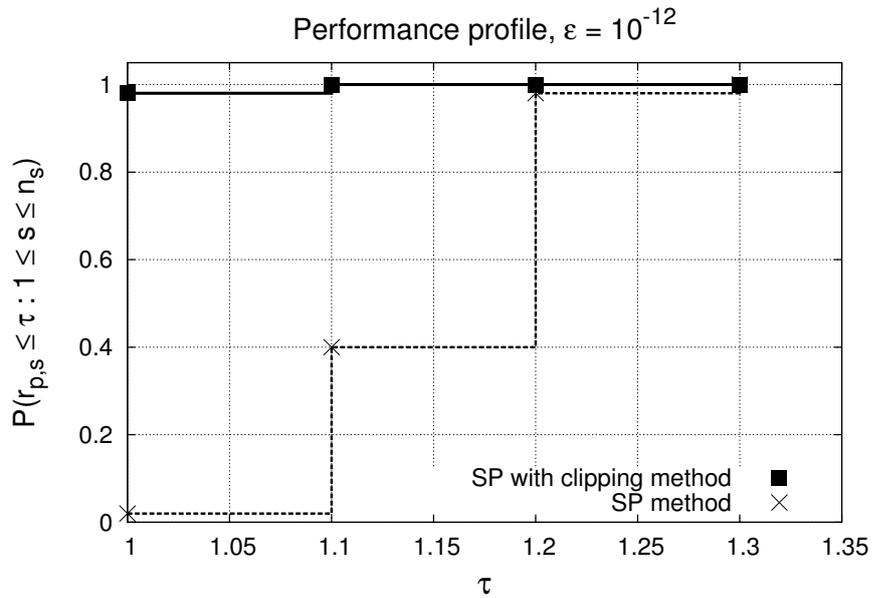


Рис. 2.8. Профили производительности для стандартного МОП и МОП с дополнительными отсечениями, целевая функция (2.14); заданная точность  $\varepsilon = 10^{-12}$

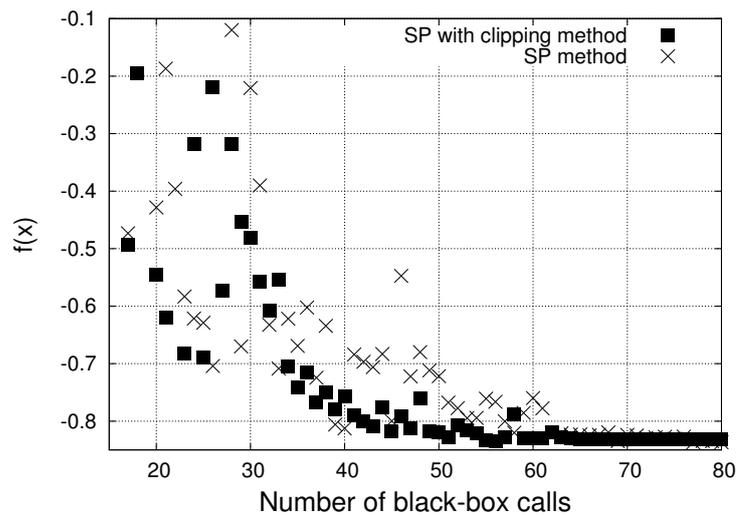


Рис. 2.9. Скорость спуска к минимуму для целевой функции (2.16), заданная точность  $\varepsilon = 10^{-15}$

Данная задача была решена с помощью двух методов – стандартного МОП и МОП с дополнительными отсечениями. Анализ скорости спуска к минимуму (см. рис. 2.9) показывает превосходство МОП с дополнительными отсечениями после  $\sim 40$ -й итерации.

Результаты численных экспериментов показали, что МОП с дополнительными отсечениями можно эффективно применять для решения задач выпуклой недифференцируемой оптимизации, которые часто возникают в том числе при решении экономических проблем. Подобное применение рассмотренного в данной главе метода для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса см. в главе 4 данной работы.

## Глава 3. Быстро сходящийся алгоритм одномерного поиска в задачах недифференцируемой оптимизации

### 3.1. Актуальность

Методы одномерной минимизации составляют важную часть всего арсенала методов оптимизации как сами по себе, так и как существенный компонент алгоритмов решения оптимизационных задач большой размерности. Задача минимизации функции одной переменной  $\min_{\lambda \geq 0} f(x + \lambda h)$ , где  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , является необходимым этапом многих современных методов минимизации функций многих переменных (см., например, [3, 5, 32, 66, 91, 135, 141]). В таких случаях задача одномерной минимизации возникает многократно, и эффективность ее решения существенно влияет на вычислительные затраты всего процесса оптимизации. Особенно важно использование более эффективных методов одномерной минимизации при решении оптимизационных задач большой размерности ввиду ограниченного быстродействия вычислительных машин.

Особый интерес для теоретических и экспериментальных исследований представляет случай, когда целевая функция, которую требуется минимизировать, не является гладкой, но является кусочно-гладкой и выпуклой. Такие случаи часто возникают при решении сложных задач оптимального планирования, проектирования и исследования операций; при использовании схем декомпозиции для решения задач математического программирования высокой размерности с блочной структурой и во многих других областях [45, 78]. Эффективное решение таких задач представляет определенную проблему в связи с разрывами производных целевой функции. В отличие от антиградиента

для гладкой функции, произвольный субградиент даже выпуклой недифференцируемой функции не всегда задает направление уменьшения значения функции, поэтому прямой перенос уже существующих методов минимизации гладких функций с использованием градиентов на случай недифференцируемых функций невозможен. В данной главе предлагается эффективный метод решения задач одномерной минимизации выпуклых негладких функций, который не требует дополнительной информации о внутренней структуре оптимизируемой функции, что является его существенным преимуществом.

Краткий обзор других методов решения таких задач со ссылками см. в [125]. Все упомянутые там методы накладывают более жесткие условия либо на гладкость и структуру целевой функции задачи, либо на заданную длину начального интервала локализации решения задачи. Во всех случаях сходимость методов не более чем сверхлинейная. Предложенный в данной главе метод демонстрирует квадратичную скорость сходимости.

### 3.2. Постановка задачи

В одномерном пространстве  $\mathbb{R}$  рассматривается разрешимая задача безусловной выпуклой недифференцируемой оптимизации

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x^*). \quad (3.1)$$

Так же, как и в главе 2, предполагается, что вся доступная информация о функции  $f(x)$  предоставляется субградиентным оракулом, т.е. в произвольной точке  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  можно определить только значение функции  $f(\bar{x})$  и субградиент  $d \in \partial f(\bar{x})$ , произвольно выбранный из субдифференциала  $\partial f(\bar{x})$  функции  $f(x)$ . Как обычно в одномерном случае, считаем известным  $[a, b]$  – начальный интервал поиска, т.е. отрезок, гарантированно содержащий точку  $x^*$ .

### 3.3. Описание метода

Для дальнейшего изложения понадобятся несколько определений.

**Определение 3.1.** *Правой производной выпуклой функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел (в случае, если он существует)*

$$d_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}.$$

Соответственно,

**Определение 3.2.** *Левой производной выпуклой функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел (в случае, если он существует)*

$$d_-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(x - \Delta)}{\Delta}.$$

**Определение 3.3.** [137] *Выпуклая функция  $f(x)$  называется существенно недифференцируемой, если существует такое  $\gamma > 0$ , что*

$$d_-(x^*) \leq -\gamma < \gamma \leq d_+(x^*),$$

где  $d_-(x^*)$  – левая производная функции  $f(x)$  в точке  $x^*$ , а  $d_+(x^*)$  – правая производная функции  $f(x)$  в точке  $x^*$ .

Если функция  $f(x)$  из задачи (3.1) существенно недифференцируема, то можно построить алгоритм решения данной задачи, имеющий квадратичную скорость сходимости. Основная идея алгоритма заключается в построении на каждой итерации, ограниченной определенным отрезком, разрывной кусочно-линейной аппроксимации субдифференциала целевой функции  $\partial f(x)$ . Предложенный в данной главе работы алгоритм основывается на [137] (для сравнения см. и [125], [124]), где также теоретически показана сверхлинейная, а при достаточно общих предположениях, и квадратичная скорость сходимости алгоритма, использующего кусочно-квадратичную аппроксимацию целевой функции.

Для выпуклой функции в силу ее дифференцируемости почти всюду [60] выполняется аналог формулы Ньютона-Лейбница (см., например, [23]):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b d(x)dx,$$

где  $a < b$ ;  $b \in \text{int dom } f$ ; для любого  $x \in \text{int dom } f$   $d(x) \in \partial f(x)$ . Это позволяет, используя вычисленные в определенных точках значения функции  $f(x)$ , уточнять кусочно-линейные аппроксимации ее субградиентного отображения  $d(x)$ . Пример такой кусочно-линейной аппроксимации показан на рис. 3.1, взятом из [137].

Важной особенностью аппроксимации субдифференциала  $\partial f(x)$  является ее разрывный характер, который отражает существенную недифференцируемость функции  $f(x)$ , поэтому в ходе вычислений происходит уточнение как линейных участков  $d(x)$ , так и местоположения и величины разрыва.

Поскольку

$$d_-(x^*) \leq 0 \leq d_+(x^*),$$

задачу (3.1) можно заменить задачей поиска оптимальной точки  $x^*$ , в которой  $0 \in \partial f(x^*)$ .

Детали реализации рассмотрены в следующем параграфе.

### 3.4. Программная реализация

Описанный в данной главе быстрый алгоритм одномерного поиска был также реализован на языке программирования `octave`.

Входные и выходные параметры вызываемой функции `line_search` описаны в табл. 3.1.

Для построения кусочно-линейных аппроксимаций субдифференциала с возможным разрывом производной необходимо использовать как минимум по две точки для каждого из линейных

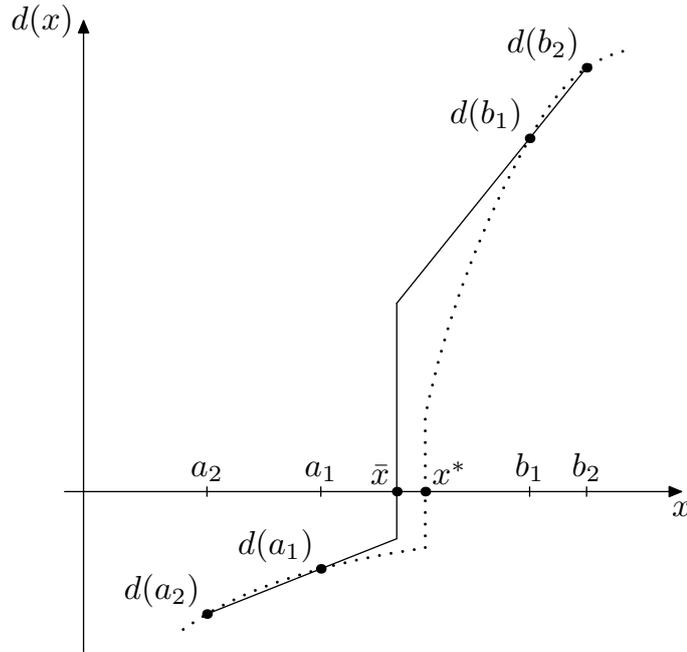


Рис. 3.1. Кусочно-линейная аппроксимация (сплошная линия)  $d(x)$  (пунктирная линия) на текущем отрезке, содержащем  $x^*$ , состоит из двух линейных участков, проходящих через пары точек  $(a_1, d(a_1))$ ,  $(a_2, d(a_2))$ ;  $(b_1, d(b_1))$ ,  $(b_2, d(b_2))$ , и точки разрыва  $\bar{x}$  (по [137])

участков. Таким образом, ищутся четыре точки  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ , которые должны удовлетворять следующим условиям:

$$a \leq a_2 < a_1 < b_1 < b_2 \leq b, \quad d(a_2) \leq d(a_1) < 0 < d(b_1) \leq d(b_2). \quad (3.2)$$

Способ вычисления данных точек, предложенный в [137], обладал следующим недостатком: не выполнялось условие принадлежности точек  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  отрезку  $[a, b]$ . Но за пределами заданного отрезка целевая функция может быть просто не определена, поэтому после перебора и тестирования различных вариантов автором была предложена следующая модификация данной *процедуры центровки*.

Очередной отрезок  $[a, b]$  делится на 5 частей. Если в ходе вычислений выясняется, что искомое решение задачи находится не в первой и не в последней одной пятой части отрезка, то точки деления отрезка

Таблица 3.1

Параметры функции `line_search`

| Входные параметры    |   |
|----------------------|---|
| <code>calcfg</code>  | оптимизируемая функция: $[ f \ g ] = \text{calcfg}(x)$          |
| <code>segment</code> | начальный отрезок   |
| <code>eps</code>     | заданная точность   |
| <code>maxit</code>   | максимальное число итераций                                     |
| <code>verbose</code> | управление печатью  |
| <code>x0</code>      | начальная точка поиска (для ф-ций многих переменных)            |
| <code>z</code>       | направление одномерного поиска<br>(для ф-ций многих переменных) |
| Выходные параметры   |   |
| <code>x</code>       | точка оптимальности   |
| <code>lmb</code>     | левая и правая границы шага                                     |
| <code>g</code>       | матрица левых-правых субградиентов                              |
| <code>nf</code>      | количество вычислений функции и субградиента                    |
| <code>iter</code>    | число итераций  |

$[a, b]$  вкупе с самими точками  $a$  и  $b$  используются в качестве базовых для построения кусочно-линейных аппроксимаций субдифференциала. В противном случае отрезок  $[a, b]$  уменьшается до этой пятой части, и итерация на этом завершается. Ведь по сути в таких "пограничных" случаях для продолжения вычислений необходимо опять выполнять какой-то вариант *центровки*. Следовательно, наиболее простой и эффективный способ – начать новую итерацию.

Данная процедура может потребовать до 4 дополнительных вычислений субградиентов, но это компенсируется, во-первых, отсутствием потери точности, во-вторых, использованием части из вычисленных

значений на последующих этапах алгоритма.

**Алгоритм.**

*Инициализация.* Положим  $a = \text{segment}(1)$ ,  $b = \text{segment}(2)$ .  
Установим счетчик итераций  $k = 1$ .

*Шаг 1. Процедура центровки.* На первой итерации алгоритма процедура центровки начинается с проверки соответствия исходных данных следующему условию: начальный отрезок должен гарантированно содержать точку  $x^*$ . При необходимости программа может откорректировать начальный отрезок, но в некоторых случаях это может ухудшить такой показатель производительности программы, как количество вычислений значений функции и субградиента. Следует заметить, что на последующих итерациях такой корректировки уже не требуется – субградиент  $d(x)$  будет иметь разные знаки на концах очередного отрезка локализации согласно логике алгоритма.

Также на данной итерации происходит поиск точек  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , удовлетворяющих условию (3.2).

*Шаг 2. Найти  $\bar{x}$ , являющийся корнем кусочно-линейной аппроксимации субдифференциала.* Точка  $\bar{x}$  определяется аналогично [137]:

$$\int_{a_2}^{b_2} d'(x, \bar{x}) dx = f(b_2) - f(a_2), \quad (3.3)$$

где

$$d'(x, \bar{x}) = \begin{cases} d(a_2) + (d(a_2) - d(a_1))(x - a_2)/(a_2 - a_1) & \text{при } a_2 \leq x \leq \bar{x}, \\ d(b_2) + (d(b_2) - d(b_1))(x - b_2)/(b_2 - b_1) & \text{при } \bar{x} < x \leq b_2. \end{cases}$$

*Шаг 3. Найти  $\bar{y}$  – вторую границу отрезка локализации минимума.*

В отличие от [137], в данном алгоритме точка  $\bar{y}$  определяется из следующих

уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{x}}^{b_1} d''(x, \bar{x}, \bar{y}) dx &= f(b_1) - f(\bar{x}) \quad \text{при } d(\bar{x}) < 0, \\ \int_{a_1}^{\bar{x}} d'''(x, \bar{x}, \bar{y}) dx &= f(\bar{x}) - f(a_1) \quad \text{при } d(\bar{x}) \geq 0; \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$d''(x, \bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} d(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \leq x \leq \bar{y}, \\ d(b_1) & \text{при } \bar{y} < x \leq b_1; \end{cases}$$

$$d'''(x, \bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} d(a_1) & \text{при } a_1 \leq x \leq \bar{y}, \\ d(\bar{x}) & \text{при } \bar{y} < x \leq \bar{x}. \end{cases}$$

*Шаг 4. Определение нового отрезка  $[a, b]$  локализации минимума.*

Новые значения  $a$  и  $b$ :  $a = \min\{\bar{x}, \bar{y}\}$ ,  $b = \max\{\bar{x}, \bar{y}\}$ .

*Шаг 5. Завершение итерации.* На данном шаге происходит занесение в память значений целевой функции и субградиента, которые понадобятся на следующей итерации; печать информации о ходе работы алгоритма и т.д.

*Шаг 6.* Если длина отрезка локализации  $[a, b]$  превышает заданную точность и количество итераций меньше максимального, то увеличить на 1 счетчик итераций  $k$  и перейти к *Шагу 1*. Иначе прекратить вычисления.

Реализованный в данной главе быстрый алгоритм одномерного поиска используется на каждом этапе метода решения задач минимизации функций многих переменных из главы 2 – МОП с дополнительными отсечениями (алгоритм SPACLIP) – и входит в состав созданного в ходе выполнения диссертационной работы комплекса программ. На каждой итерации SPACLIP для решения задачи одномерной минимизации при вызове пользовательской функции `calcfg` для вычисления  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , происходит вычисление функции многих переменных  $f(x_0 + xz)$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  и направление поиска  $z \in \mathbb{R}^n$  – заданные входные параметры, значения которых формирует во время своей работы алгоритм SPACLIP.

Соответственно, субградиент функции  $f(x)$  можно вычислить, умножив транспонированный вектор-субградиент функции  $f(x_0 + xz)$  на вектор  $z$ .

Сходимость данного алгоритма утверждается следующей теоремой.

**Теорема 3.1.** [137] Пусть  $\delta = (b_2 - a_2)/5$ ,  $H = d_+(x^*) - d_-(x^*)$ . Если выполняются следующие условия:

1) субградиентное отображение  $d(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка 1 с константой  $\Lambda$  на полуинтервалах  $[a, x^*)$  и  $(x^*, b]$  и условию невырожденности:  $|d(x) - d(y)| > \lambda|x - y|$  для  $x, y \in [a, b]$ ,  $x \neq y$  и некоторого  $\lambda > 0$ ;

$$2) \delta < \min\left\{\frac{\gamma}{4\Lambda}, \frac{H}{7\sqrt{2}\Lambda}, \frac{H\sqrt{\lambda/\Lambda}}{14\Lambda}\right\};$$

то для  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , определяемых по формулам (3.3)-(3.4), и  $x^* \in (\min\{\bar{x}, \bar{y}\}, \max\{\bar{x}, \bar{y}\})$  справедливы следующие неравенства:

$$|\bar{x} - x^*| \leq 14\Lambda\delta^2/H,$$

$$|\bar{y} - x^*| \leq 3\Lambda\delta^2/H.$$

### 3.5. Вычислительные эксперименты

Реализованный алгоритм был протестирован на ряде задач недифференцируемой оптимизации, имеющих различные свойства. В пп. 3.5.1–3.5.4 приводятся результаты вычислительных экспериментов, сделанных для определения скорости сходимости алгоритма. Также было проведено сравнительное тестирование данного алгоритма и других возможных методов решения проблем НДО на сериях из нескольких тысяч однотипных задач. Его результаты см. в п. 3.5.5.

**3.5.1. Тестовые задачи с кусочно-квадратичной оптимизируемой функцией.** Первая серия вычислительных экспериментов была сделана с кусочно-квадратичными функциями, для которых модель кусочно-линейного субдифференциала является точной. В этих условиях можно было ожидать, что алгоритм закончит работу за

конечное число итераций, что подтвердилось на практике. И даже для такой "несбалансированной" целевой функции  $f(x)$ , как

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 0, \\ 100x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$$

при точности до  $10^{-15}$  включительно решение – точка  $(0, 0)$  – определяется всего за одну итерацию. Хотя такая задача не является существенно недифференцируемой. Здесь следует отметить, что по сравнению с вычислительным экспериментом в [6], качество алгоритма существенно улучшилось.

**3.5.2. Тестовые задачи с экспоненциально-квадратичной целевой функцией.** Пусть оптимизируемая функция  $f(x)$  имеет следующий вид:

$$f(x) = \max\{\alpha^2 x^2, e^{-x}\}. \quad (3.5)$$

Изменяя значение параметра  $\alpha$ , можно варьировать степень несимметричности целевой функции относительно оптимальной точки.

Начальный отрезок для данной задачи был задан следующим образом:  $[a, b] = [-20, 30]$ .

Пусть  $\varepsilon$  – заданная пользователем точность решения задачи (3.1). Как известно, если метод имеет квадратичную скорость сходимости, то  $\log(\log(\varepsilon))$  должен линейно зависеть от количества итераций метода, требуемых для достижения заданной точности  $\varepsilon$ . На рис. 3.2-3.4 приведены графики такой зависимости реализованного алгоритма одномерного поиска для задач с целевой функцией (3.5). Ясно видна квадратичная скорость сходимости.

Важная характеристика метода – количество требуемых вычислений субградиентов оптимизируемой функции. В таблице 3.2 приведены результаты подсчета таких вычислений в реализованном алгоритме при

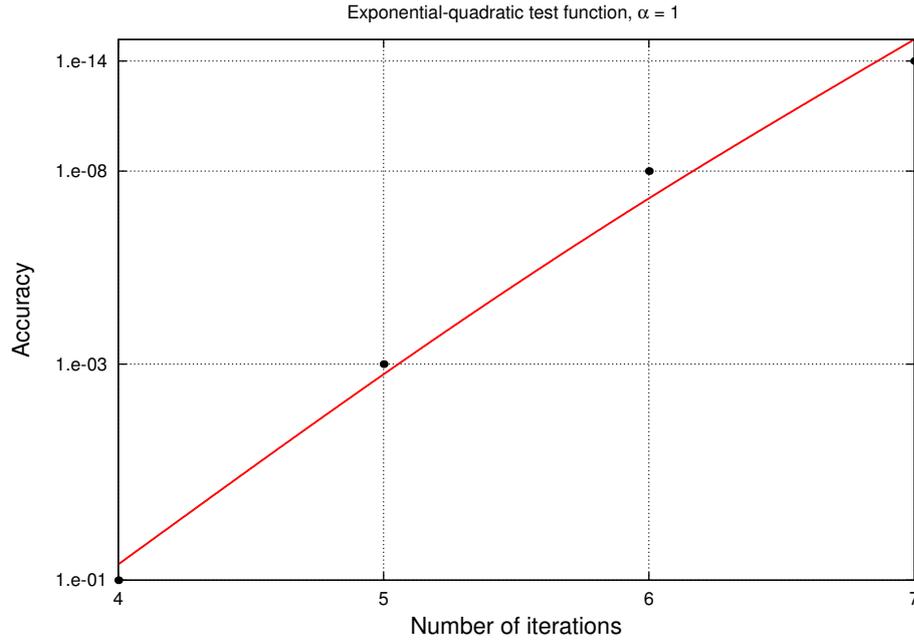


Рис. 3.2. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.2, параметр  $\alpha = 1$ . Здесь и далее сделано нелинейное масштабирование по оси ординат с помощью двойного логарифмирования

решении задач из данного раздела.

**3.5.3. Тестовые задачи с кубично-линейной оптимизируемой функцией.** Пусть оптимизируемая функция  $f(x)$  имеет следующий вид:

$$f(x) = \max\{x^3, \alpha x + 1\}, \quad \alpha < 0. \quad (3.6)$$

Начальный отрезок для данной задачи был задан следующим образом:  $[a, b] = [-20, 30]$ . Результаты нахождения минимума функции (3.6) с помощью алгоритма одномерного поиска приведены на рис. 3.5–3.7. На рис. 3.8 показана зависимость количества необходимых для достижения заданной точности итераций реализованного алгоритма от точности.

**3.5.4. Тестовая задача с кусочно-линейной целевой функцией.** Пусть оптимизируемая функция  $f(x)$  имеет следующий

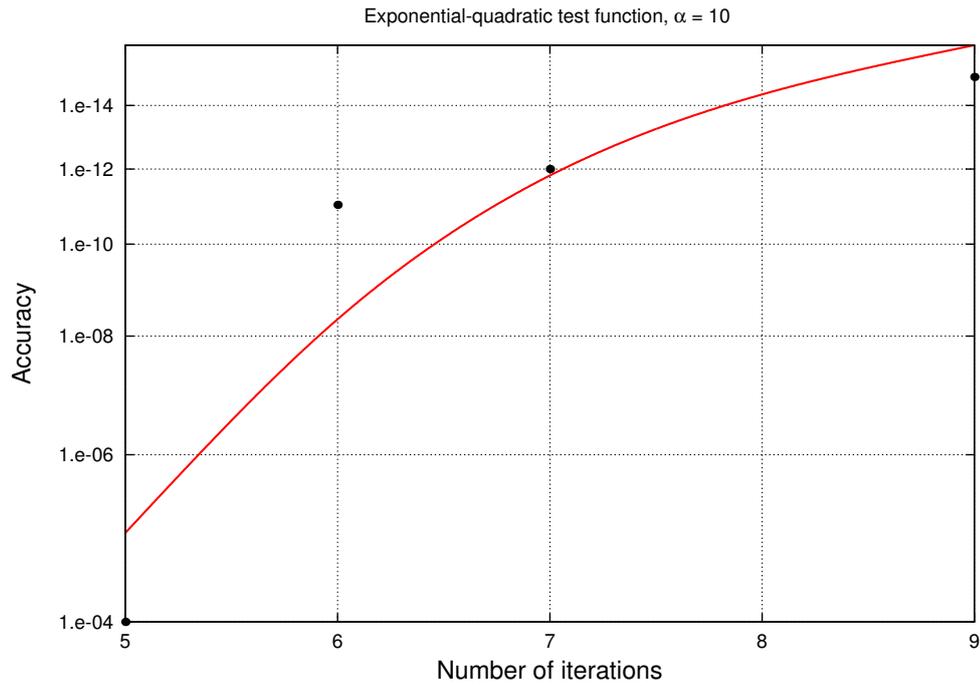


Рис. 3.3. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.2, параметр  $\alpha = 10$

вид:

$$f(x) = \max\{-5x + 1, x - 4\}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что решение задачи  $x^* = \frac{5}{6}$ . Для тестирования был задан достаточно большой начальный интервал  $[-100, 90]$ . Результаты показаны на рис. 3.9.

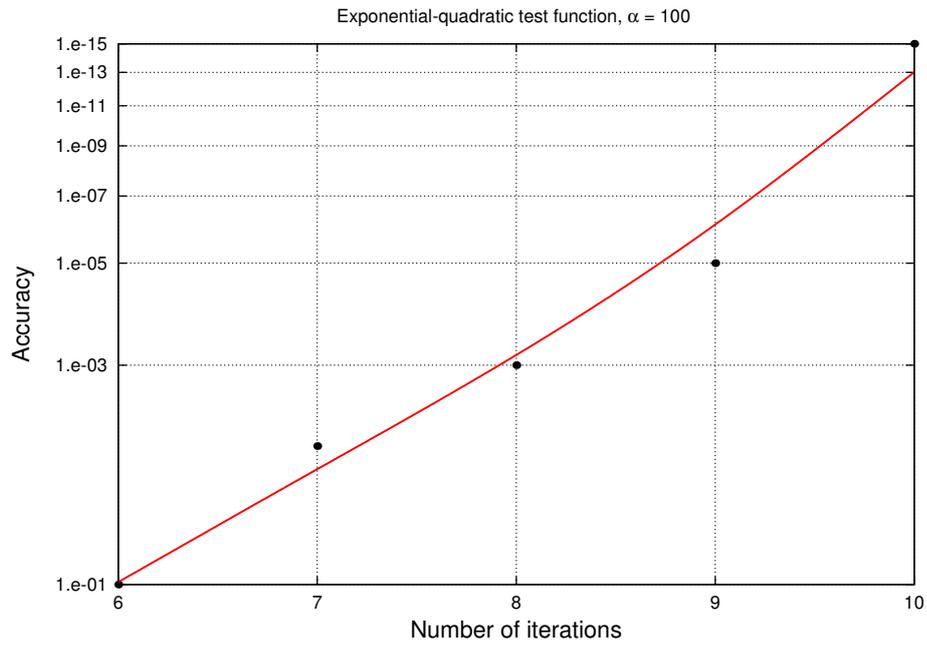


Рис. 3.4. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.2, параметр  $\alpha = 100$

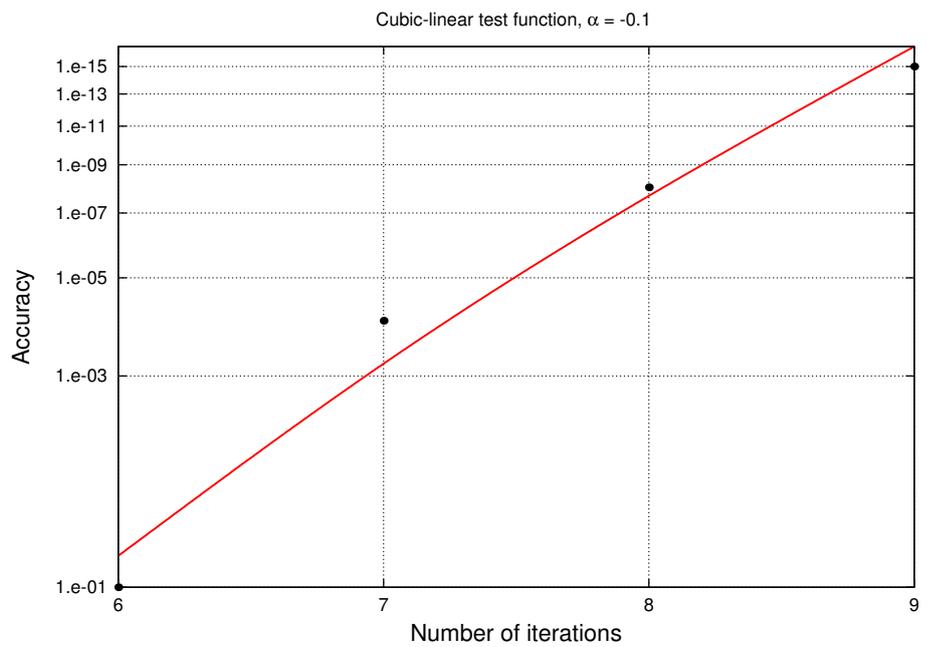


Рис. 3.5. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.3, параметр  $\alpha = -0.1$

Таблица 3.2

Количество вычислений целевой функции и субградиента при решении задач раздела 3.5.2 реализованным методом

| Заданная<br>точность ( $\varepsilon$ ) | Кол-во вычислений цел. ф-ции (nf) |               |                |
|--|-----------------------------------|---------------|----------------|
|  | $\alpha = 1$                      | $\alpha = 10$ | $\alpha = 100$ |
| $10^{-1}$                              | 14                                | 15            | 10             |
| $10^{-2}$                              | 20                                | 15            | 15             |
| $10^{-3}$                              | 20                                | 17            | 16             |
| $10^{-4}$                              | 20                                | 18            | 17             |
| $10^{-5}$                              | 20                                | 20            | 18             |
| $10^{-6}$                              | 24                                | 26            | 20             |
| $10^{-7}$                              | 28                                | 26            | 21             |
| $10^{-8}$                              | 38                                | 26            | 23             |
| $10^{-9}$                              | 38                                | 26            | 24             |
| $10^{-10}$                             | 38                                | 26            | 29             |
| $10^{-11}$                             | 38                                | 26            | 37             |
| $10^{-12}$                             | 38                                | 26            | 41             |
| $10^{-13}$                             | 38                                | 26            | 45             |
| $10^{-14}$                             | 38                                | 26            | 53             |
| $10^{-15}$                             | 38                                | 26            | 57             |

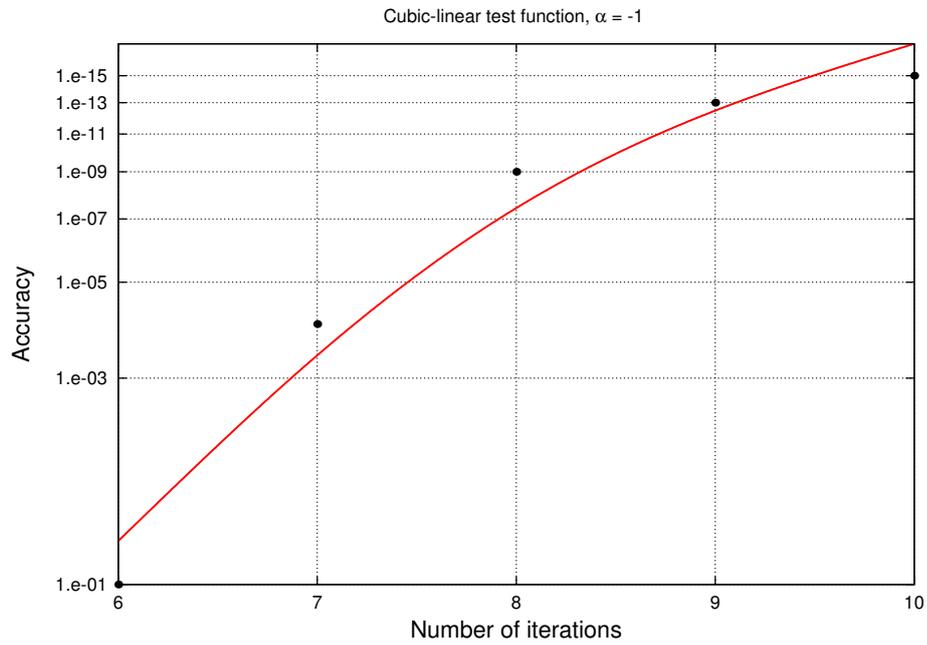


Рис. 3.6. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.3, параметр  $\alpha = -1$

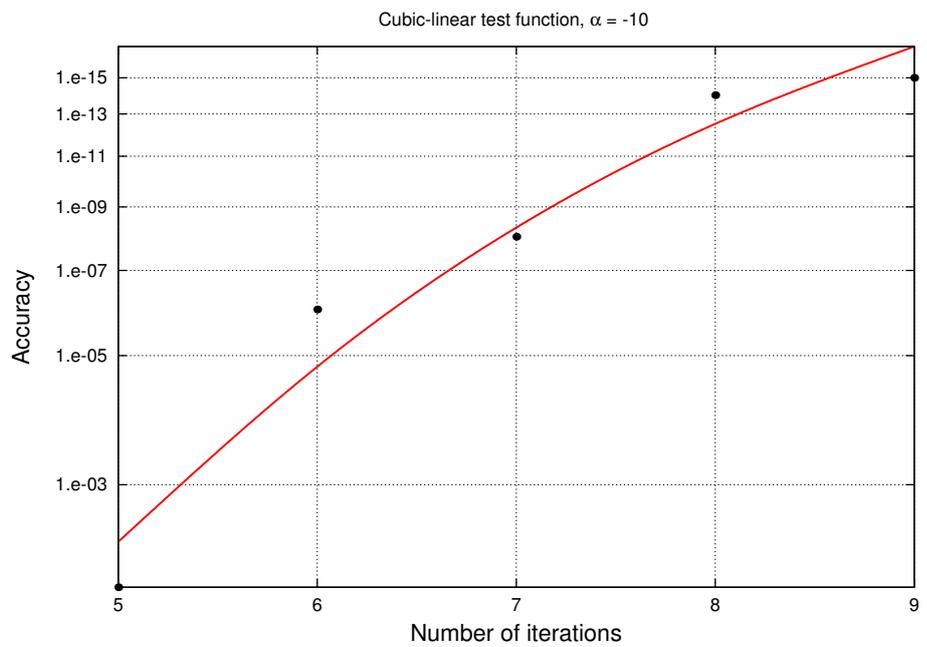


Рис. 3.7. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.3, параметр  $\alpha = -10$

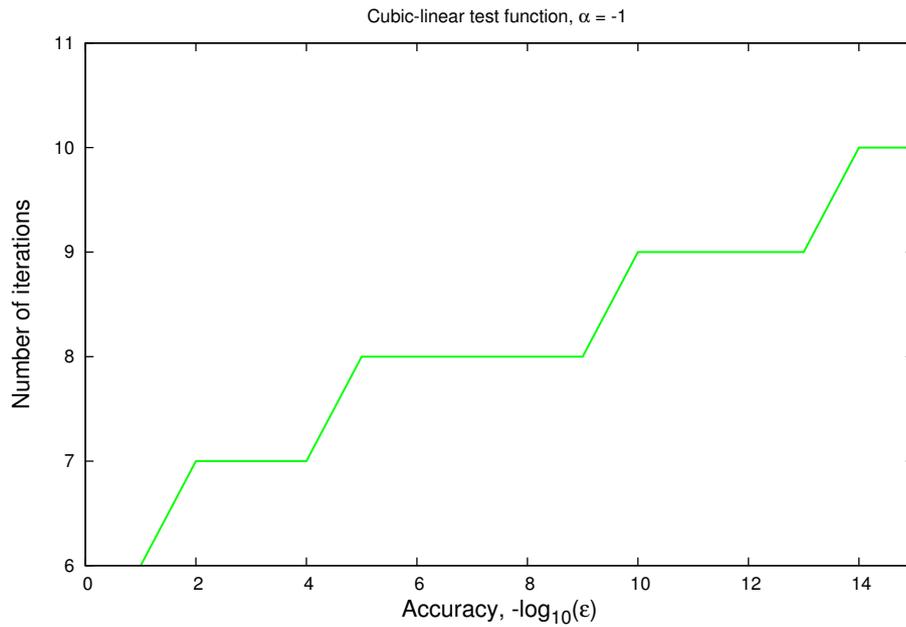


Рис. 3.8. Зависимость количества итераций алгоритма одномерного поиска от заданной точности  $\epsilon$  при решении задачи из раздела 3.5.3, параметр  $\alpha = -1$

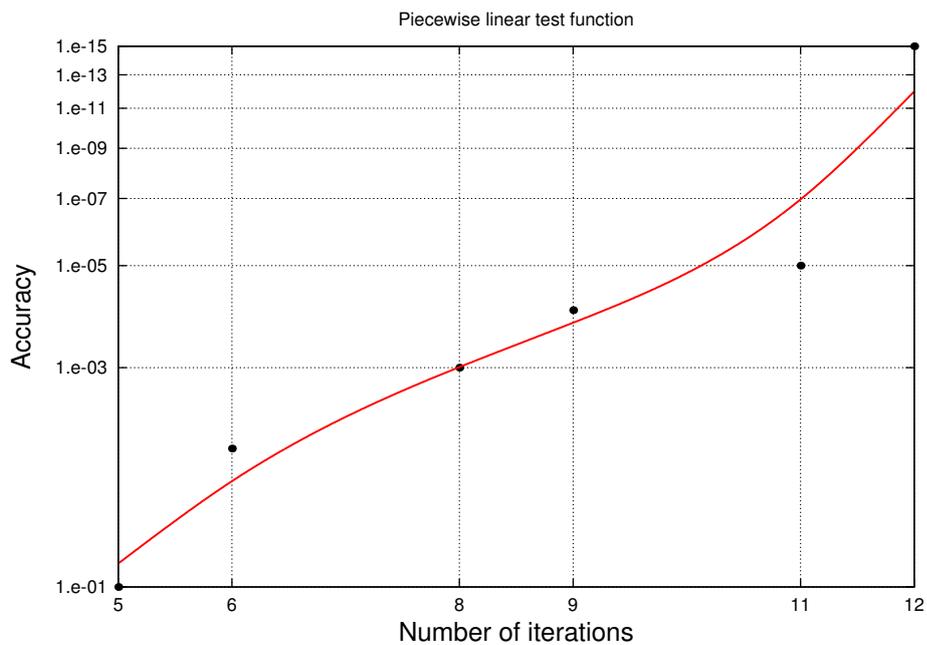


Рис. 3.9. Сходимость метода на задаче из раздела 3.5.4

**3.5.5. Кубично-кубичная функция и профили производительности.** В качестве теста рассматривались функции вида

$$f(x) = \max\{10x^3, -10(x - \alpha)^3\}, \quad 1 \leq \alpha \leq 2001. \quad (3.8)$$

Параметр  $\alpha$  выбирался случайным образом из указанного отрезка.

С помощью алгоритма одномерного поиска, метода деления пополам и метода золотого сечения была решена серия из 2000 задач данного вида. Результаты сравнительного тестирования методов представлены на рис. 3.10–3.13. Полученные во время тестирования результаты были обработаны по той же методике [99] с построением профилей производительности, что и в главе 2. Эффективность методов оценивалась по количеству необходимых вычислений значений функции и субградиента и по процессорному времени, которое потребовалось методам для решения задачи.

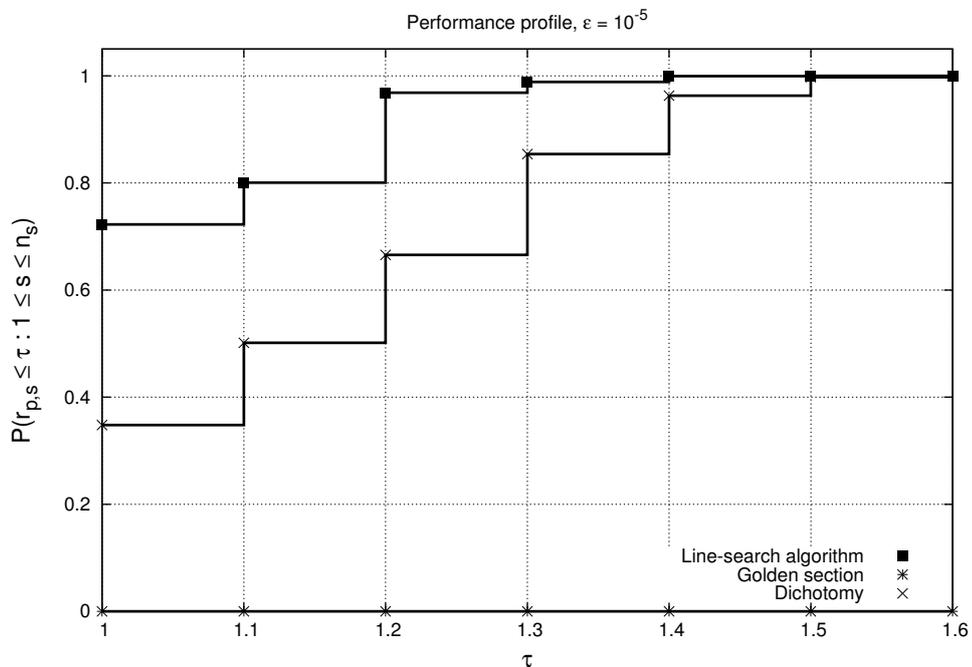


Рис. 3.10. Профили производительности для алгоритма одномерного поиска, дихотомии и метода золотого сечения по количеству вычислений значений функции и субградиента; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-5}$

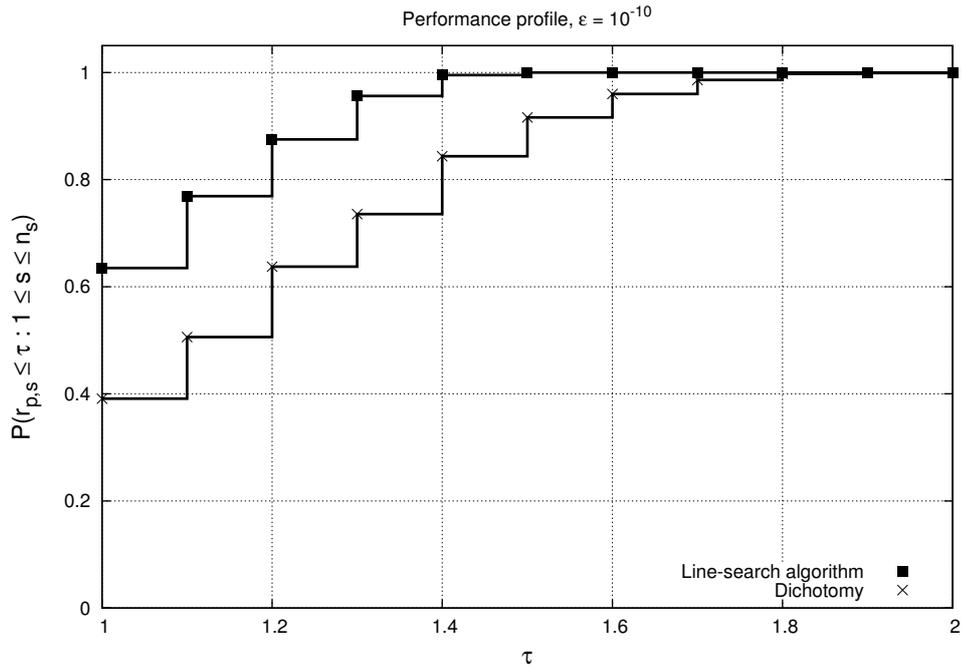


Рис. 3.11. Профили производительности для алгоритма одномерного поиска, дихотомии и метода золотого сечения по количеству вычислений значений функции и субградиента; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-10}$

В качестве измеримого показателя производительности  $t_{p,s}$  на графиках рис. 3.10 – 3.12 используется количество вычислений значений функции и субградиента, а на рис. 3.13 – затраченное процессорное время.

Результаты сравнительного тестирования показывают, что при решении задач вида (3.8) алгоритм одномерного поиска одерживает безоговорочную победу над дихотомией и по количеству вычислений значений функции и субградиента, и по затраченному процессорному времени. Что касается метода золотого сечения, то с его помощью не удалось найти решение большинства задач вида (3.8) с требуемой точностью.

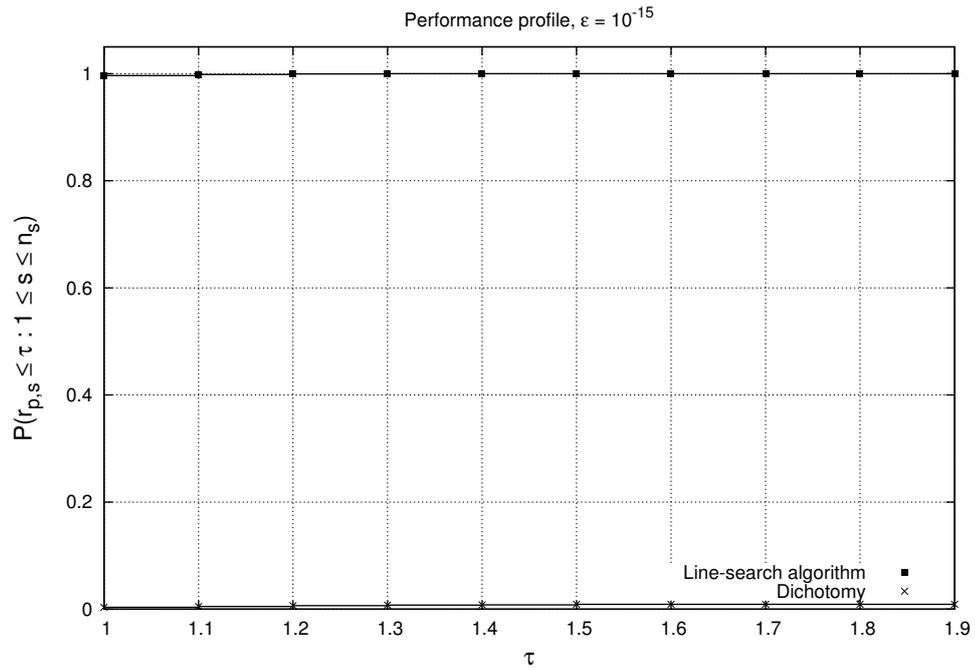


Рис. 3.12. Профили производительности для алгоритма одномерного поиска, дихотомии и метода золотого сечения по количеству вычислений значений функции и субградиента; заданная точность:  $\varepsilon = 10^{-15}$

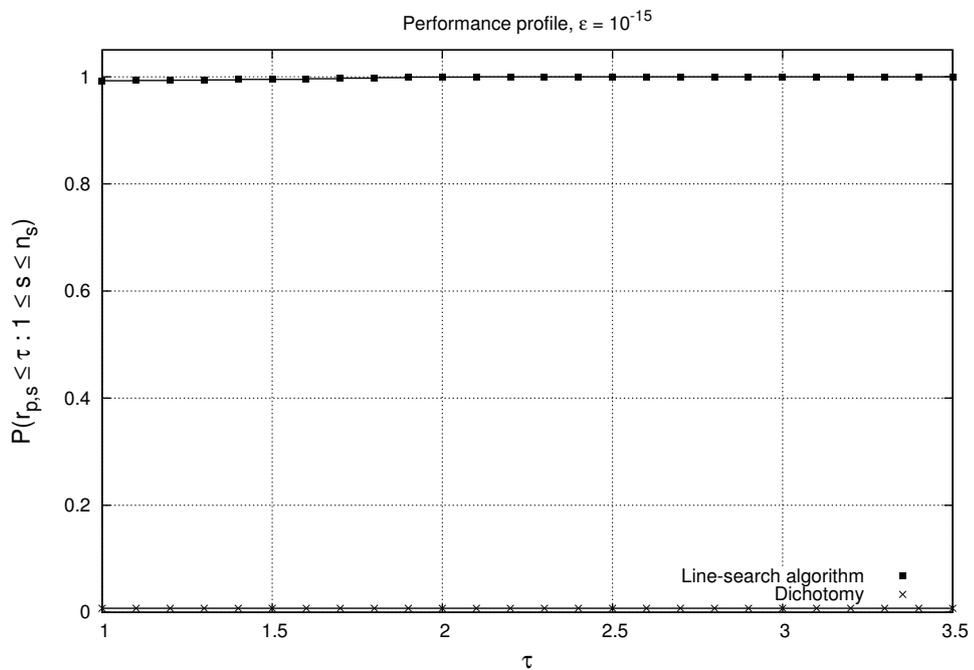


Рис. 3.13. Профили производительности для алгоритма одномерного поиска и дихотомии по затраченному процессорному времени; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-15}$

### 3.6. Быстрый алгоритм одномерного поиска

В данной главе рассмотрен модифицированный алгоритм одномерного поиска, предназначенный для решения задач выпуклой недифференцируемой оптимизации кусочно-гладких функций одной переменной. Предложенные модификации алгоритма связаны с уменьшением количества вычислений субградиентов целевой функции; с использованием данного алгоритма для нахождения оптимума функции многих переменных в заданном направлении; изменена процедура центровки.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили на практике, что реализованный метод может достигать квадратичной скорости сходимости. Также были построены сравнительные профили производительности для алгоритма одномерного поиска, дихотомии и метода золотого сечения при решении определенного вида задач. Результаты сравнения профилей производительности показали, что алгоритм одномерного поиска имеет значительные преимущества перед указанными методами оптимизации.

В главе 2 и главе 4 данный алгоритм используется как один из этапов метода отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенного для решения задач безусловной минимизации недифференцируемых функций многих переменных.

Одна из первых версий реализации данного алгоритма зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам [51].

## Глава 4. Практическое решение линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса

### 4.1. Создание модели задачи на языке моделирования AMPL.

Для изучения возможностей решения ЛЗД с помощью существующих методов решения задач НДО необходимо описать модель задачи на одном из языков моделирования. В качестве такого языка был выбран один из самых широко применяемых для решения задач математического программирования язык так называемого алгебраического моделирования AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming) [100].

Код для модели представлен в алгоритме 1. Для записи исходных данных создается еще один файл, начинающийся со служебного слова `data;`. В этом файле задаются все параметры модели (задаваемые

служебным словом `param`).

```

Data: Another file inoutdata.ampl

1 set Y 'y - output' ordered; # Потребление продукции
2 set X 'x - input' ordered; # Выпуск продукции
3 set A := Y cross X;
4 param m >= 0; # Количество отраслей потребления
5 param n >= 0; # Количество отраслей производства
6 param ly_real{Y} >= 0; # Потребление в разрезе отраслей
7 param io{A} >= 0; # Матрица коэф-в прямых произв. затрат
8 param otkl >= 0; # Ширина отклонения для интервальной
   матрицы коэф-в
9 param io1_ot {i in Y, j in X} = (io[i, j] - otkl*io[i, j]);
10 param io2_ot {i in Y, j in X} = (io[i, j] + otkl*io[i, j]);
11 param E{i in Y, j in X} := if (ord(i,Y)=ord(j, X)) then 1 else 0;
12 param io1 {i in Y, j in X} = E[i, j] - io2_ot[i, j];
13 param io2 {i in Y, j in X} = E[i, j] - io1_ot[i, j];
14 param uy {j in Y} = 1.2*ly_real[j];
15 param ly {j in Y} = if (j = 'y1') then 1.1*ly_real['y1'] else ly_real[j];
16 var x {i in X};
17 var s1 {i in Y} = 0.5*(ly[i]+uy[i]) -  $\sum$  {k in X} io1[i,k]*x[k];
18 var s2 {i in Y} = 0.5*(ly[i]+uy[i]) -  $\sum$  {k in X} io2[i,k]*x[k];
19 var sus {i in Y} = max (s1[i], s2[i]);
20 var los {i in Y} = min (s1[i], s2[i]);
21 var mags {i in Y} = max (abs(los[i]), abs(sus[i]));
22 minimize minosTol: -(min {i in Y} (0.5*(uy[i]-ly[i]) - mags[i])); #

```

Распознающий функционал

**Algorithm 1:** Линейная задача о допусках для модели межотраслевого баланса как задача НДО

После описания модели необходимо выбрать солвер для решения

оптимизационной задачи. Наиболее известным и крупнейшим в мире сервером, предоставляющим возможность решать задачи оптимизации онлайн является NEOS (Network-Enabled Optimization Server) [128]. Были сделаны попытки решить представленную в разделе 4.2.2 задачу оценки перспектив развития региональной экономики (на примере Приморского края) с использованием интервальной модели межотраслевого баланса (МОБ). Для решения задачи использовались следующие солверы, доступные на URL: <http://neos-server.org/neos/>:

1. CONDOR (COstrained, Non-linear, Direct, parallel, multi-objective Optimization using trust Region method for high-computing load, noisy objective functions) [88] – солвер, специально предназначенный для решения задач НДО, но размерности не более 50 переменных;
2. LANCELOT [113] – пакет, предназначенный для решения задач нелинейного программирования большой размерности;
3. CONOPT (URL: <http://www.conopt.com/>) – пакет, предназначенный для решения задач нелинейного программирования.

Ни один из перечисленных солверов с задачами, представленными в разделе 4.2.2, не справился.

## 4.2. Вычислительные эксперименты

Для доказательства эффективности предложенного в работе подхода с применением НДО была использована свободно распространяемая программа для исследования разрешимости интервальной линейной задачи о допусках TOLSOLVITY С.П. Шарого (ИВТ СО РАН, г. Новосибирск), которая выдаёт заключение о разрешимости задачи о допусках для интервальной линейной системы  $Ax = b$ , значение максимума распознающего функционала её допускового множества

решений и доставляющий его вектор аргументов. Программа выложена на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу **URL:** <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/index.php>. В данной программе для максимизации распознающего функционала используется вариант алгоритма суперградиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных суперградиентов [81]. Также на основе данной программы был написан ее модифицированный вариант на языке `octave`, использующий для решения задачи негладкой оптимизации метод SPACLIP (см. главу 2). При этом задача на максимум вогнутой функции была заменена задачей на минимум выпуклой функции. Общая структура созданного комплекса программ данной диссертационной работы приведена на рис. 4.1.

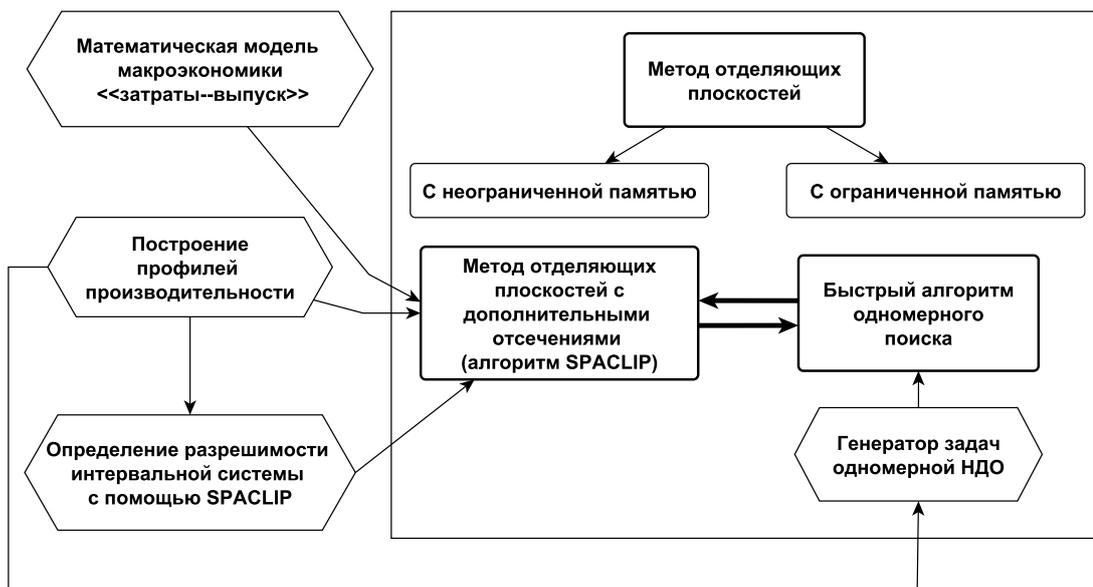


Рис. 4.1. Структура созданного комплекса программ

**4.2.1. Модельная задача размерности 2.** Первой была решена задача исследования разрешимости линейной задачи о допусках для

следующей интервальной системы [71]:

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-2/3, 1/2] \\ [-2/3, 1/2] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

В этой простой задаче распознающий функционал можно вычислить аналитически, как и решение задачи максимизации:  $\text{Tol}(x) = 1 - \max\{|[1, 2]x_1 + [-2/3, 1/2]x_2|, |[-2/3, 1/2]x_1 + [1, 2]x_2|\}$ ,  $\max_x \text{Tol}(x) = \text{Tol}(0) = 1$ ; поэтому ее можно использовать для проверки корректности работы методов. На рис. 4.2 для наглядности представлен график распознающего функционала.

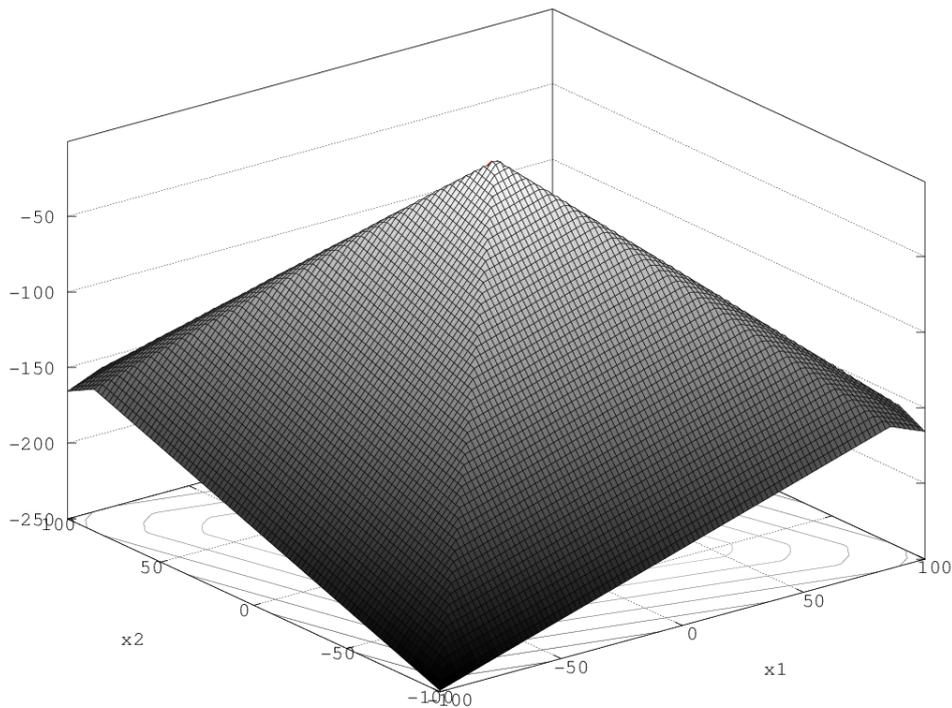


Рис. 4.2. График распознающего функционала для интервальной системы (4.1)

Результаты исследования разрешимости ЛЗД для системы (4.1) с помощью методов НДО, в том числе предложенных в работе, приведены в табл. 4.1. Тестирование для  $r$ -алгоритма и алгоритма

Таблица 4.1

Результаты исследования разрешимости ЛЗД для системы (4.1). Требуемая точность решения  $\varepsilon = 10^{-4}$ , начальная точка для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIIP (10, 10)

| Метод         | Число итер. | Проц-ное время, с | Кол-во обр. к оракулу | Опт. точка $x^*$    | Tol( $x^*$ ) |
|---------------|-------------|-------------------|-----------------------|---------------------|--------------|
| $r$ -алгоритм | 24          | 0.124             | 60                    | (2.73e-5, -3.22e-5) | 0.999949     |
| SPACLIIP      | 2           | 0.033             | 3                     | (0, 0)              | 1            |
| CONDOR        | –           | –                 | 12                    | (0, 0)              | 1            |

SPACLIIP проводилось на стандартной машине под управлением ОС Linux, дистрибутив openSUSE 12.3 Dartmouth, процессор AMD Athlon 64 3500+, 2 Гб оперативной памяти; версия интерпретатора octave 3.6.4. Солвер CONDOR [88] запускался на сервере NEOS [128]. Система (4.1) совместна. По всем позициям - и по затраченному процессорному времени, и по количеству вычислений целевой функции (обращений к оракулу), и по количеству итераций – алгоритм SPACLIIP оказался более предпочтительным, чем  $r$ -алгоритм [81]. По количеству обращений к оракулу SPACLIIP также оказался предпочтительнее CONDOR.

**4.2.2. Оценка перспектив развития экономики Приморского края с помощью решения линейной задачи о допусках.** В качестве практического применения предложенных в работе методов был решен ряд задач оценки перспектив развития региональной экономики (на примере Приморского края) с использованием интервальной модели межотраслевого баланса (МОБ). В настоящее время в соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 14 февраля 2009 г. № 201-р [58] завершается разработка базовых таблиц «затраты

– выпуск» [126] за 2011 г., необходимых для расчетов по интервальной модели Леонтьева. Ожидается, что составление данных таблиц будет закончено к концу 2015 г. В связи с этим будет актуальным использование предложенных в работе методов.

Для расчетов в подразделе были использованы данные таблиц «затраты – выпуск» для Приморского края за 2011 г., представленные в работе [41], а также статистические данные ежегодника «Приморский край. Социально-экономические показатели» за 2013 год [52]. Экономические показатели региона были разбиты на пятнадцать следующих отраслей:

1. Сельское хозяйство, охота и лесоводство;
2. Рыболовство, рыбоводство;
3. Добыча полезных ископаемых;
4. Обрабатывающие производства;
5. Производство и распределение энергии;
6. Строительство;
7. Оптовая и розничная торговля;
8. Гостиницы и рестораны;
9. Транспорт и связь;
10. Финансовая деятельность;
11. Операции с недвижимостью, аренда;
12. Государственное управление;
13. Образование;
14. Здравоохранение и предоставление социальных услуг;
15. Предоставление коммерческих услуг.

По данным таблицы «Межотраслевой баланс экономики региона (Приморского края за 2011 г.)», взятой из [41, с. 280], была построена матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$  коэффициентов прямых производственных

затрат, представленная в табл. 4.2. Коэффициенты  $a_{ij}$  считаются по формуле (см., например, [20, с. 428]):

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},$$

где  $x_{ij}$  – величина выпуска  $i$ -й отрасли, используемого в качестве ресурса в отрасли с номером  $j$ ,  $x_j$  – выпуск  $j$ -й отрасли,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Таблица 4.2

Матрица коэффициентов прямых производственных затрат для модели «затраты–выпуск» (Приморский край, 2011 год)

| Отрасль | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     | 15     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1       | 0.1334 | 0.0554 | 0.0283 | 0.0625 | 0.0160 | 0.0100 | 0.0247 | 0.0216 | 0.0065 | 0.0105 | 0.0008 | 0.0021 | 0.0053 | 0.0068 | 0.0183 |
| 2       | 0.0322 | 0.1720 | 0.0001 | 0.1137 | 0.0176 | 0.0012 | 0.0330 | 0.0124 | 0.0003 | 0.0056 | 0.0029 | 0.0024 | 0.0038 | 0.0025 | 0.0061 |
| 3       | 0.0135 | 0.0005 | 0.0710 | 0.0247 | 0.0634 | 0.0093 | 0.0051 | 0.0013 | 0.0018 | 0.0176 | 0.0004 | 0.0010 | 0.0005 | 0.0003 | 0.0148 |
| 4       | 0.0430 | 0.0705 | 0.0890 | 0.1044 | 0.1458 | 0.0912 | 0.1209 | 0.0061 | 0.0799 | 0.0133 | 0.0145 | 0.0162 | 0.0133 | 0.0213 | 0.0322 |
| 5       | 0.0479 | 0.0532 | 0.1381 | 0.0430 | 0.1240 | 0.0633 | 0.0252 | 0.0186 | 0.0407 | 0.0169 | 0.0012 | 0.0173 | 0.0256 | 0.0380 | 0.0982 |
| 6       | 0.0313 | 0.0285 | 0.0359 | 0.1253 | 0.1416 | 0.0873 | 0.0034 | 0.0593 | 0.0742 | 0.0239 | 0.0898 | 0.0759 | 0.0577 | 0.0759 | 0.0256 |
| 7       | 0.0066 | 0.0089 | 0.0128 | 0.0908 | 0.0342 | 0.0669 | 0.0235 | 0.1406 | 0.0744 | 0.0428 | 0.0418 | 0.0469 | 0.0658 | 0.0670 | 0.0639 |
| 8       | 0.0035 | 0.0059 | 0.0115 | 0.0089 | 0.0088 | 0.0056 | 0.0198 | 0.0049 | 0.0047 | 0.0162 | 0.0026 | 0.0013 | 0.0035 | 0.0015 | 0.0155 |
| 9       | 0.0196 | 0.0026 | 0.0346 | 0.0622 | 0.0077 | 0.0754 | 0.0428 | 0.0761 | 0.0396 | 0.0492 | 0.0522 | 0.0133 | 0.0062 | 0.0363 | 0.0436 |
| 10      | 0.0006 | 0.0006 | 0.0010 | 0.0008 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0007 | 0.0027 | 0.0009 | 0.0077 | 0.0014 | 0.0014 | 0.0017 | 0.0017 | 0.0019 |
| 11      | 0.0133 | 0.0115 | 0.0267 | 0.0097 | 0.0452 | 0.0458 | 0.0268 | 0.0598 | 0.0359 | 0.0232 | 0.0364 | 0.0112 | 0.0174 | 0.0045 | 0.0083 |
| 12      | 0.0078 | 0.0095 | 0.0212 | 0.0073 | 0.0250 | 0.0175 | 0.0028 | 0.0338 | 0.0331 | 0.0569 | 0.0371 | 0.0187 | 0.0463 | 0.0360 | 0.0319 |
| 13      | 0.0094 | 0.0076 | 0.0287 | 0.0081 | 0.0056 | 0.0023 | 0.0009 | 0.0013 | 0.0144 | 0.0379 | 0.0084 | 0.0266 | 0.0416 | 0.0433 | 0.0447 |
| 14      | 0.0187 | 0.0177 | 0.0283 | 0.0114 | 0.0268 | 0.0315 | 0.0018 | 0.0202 | 0.0208 | 0.0239 | 0.0152 | 0.0405 | 0.0276 | 0.0295 | 0.0304 |
| 15      | 0.0009 | 0.0114 | 0.0193 | 0.0068 | 0.0056 | 0.0085 | 0.0026 | 0.0207 | 0.0014 | 0.0225 | 0.0019 | 0.0029 | 0.0046 | 0.0028 | 0.0069 |

Поскольку основное допущение модели «затраты – выпуск» состоит в том, что технологические коэффициенты  $a_{ij}$  принимаются неизменными [22], данную матрицу можно использовать и при моделировании экономики региона в последующие годы. Однако эти коэффициенты могли быть рассчитаны по данным, приведенным с некоторой неизвестной погрешностью. Преимущество интервальной модели в том, что можно учесть эту неопределенность в данных, превратив матрицу  $A$  в интервальную.

Для решения ЛЗД требуются также данные по региональному конечному спросу (помимо конечного потребления учитываются валовое накопление основного капитала и изменение запасов материальных средств) в разрезе отраслей ( $y_i, i = 1, \dots, n$  в модели). Расчетные данные представлены в таблице 4.3, там же для сравнения приведены расчетные объемы производства. Расчет производился на основе данных таблицы 1 [41, с. 279], которые были откорректированы с учетом обновленных сведений за 2011 и 2012 гг. из [52] (строка **Итого** таблицы 4.3). Корректировка была сделана с помощью поправки на процент изменения.

Таблица 4.3

Объемы производства и ВРП в разрезе отраслей, млн. руб. (Приморский край)

| Отрасль              | 2011 г.       |                        | 2012 г.       |                        | 2013 г.       |                        | 2014 г.       |                        |
|----------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|
|                      | ВРП ( $y_i$ ) | Объемы пр-ва ( $x_i$ ) | ВРП ( $y_i$ ) | Объемы пр-ва ( $x_i$ ) | ВРП ( $y_i$ ) | Объемы пр-ва ( $x_i$ ) | ВРП ( $y_i$ ) | Объемы пр-ва ( $x_i$ ) |
| 1                    | 14141         | 39325                  | 14274         | 40474                  | 14914         | 41407                  | 15017         | 41650                  |
| 2                    | 10095         | 40530                  | 10190         | 41714                  | 10647         | 42676                  | 10720         | 42926                  |
| 3                    | 2628          | 15106                  | 2653          | 15547                  | 2772          | 15906                  | 2791          | 15999                  |
| 4                    | 55064         | 139239                 | 55582         | 143306                 | 58073         | 146611                 | 58474         | 147469                 |
| 5                    | 14333         | 63486                  | 14468         | 65340                  | 15116         | 66847                  | 15221         | 67239                  |
| 6                    | 153625        | 231323                 | 155072        | 238079                 | 162022        | 243570                 | 163140        | 244995                 |
| 7                    | 71283         | 129580                 | 71954         | 133364                 | 75179         | 136440                 | 75698         | 137239                 |
| 8                    | 988           | 8593                   | 997           | 8844                   | 1042          | 9048                   | 1049          | 9101                   |
| 9                    | 136357        | 183409                 | 137641        | 188765                 | 143810        | 193119                 | 144803        | 194249                 |
| 10                   | 314           | 1431                   | 317           | 1473                   | 331           | 1507                   | 333           | 1516                   |
| 11                   | 30874         | 61099                  | 31165         | 62884                  | 32561         | 64334                  | 32786         | 64710                  |
| 12                   | 34433         | 54624                  | 34757         | 56219                  | 36315         | 57516                  | 36565         | 57853                  |
| 13                   | 11005         | 21635                  | 11109         | 22267                  | 11607         | 22781                  | 11687         | 22914                  |
| 14                   | 12060         | 33737                  | 12173         | 34722                  | 12719         | 35523                  | 12807         | 35731                  |
| 15                   | 2574          | 7960                   | 2598          | 8192                   | 2715          | 8381                   | 2734          | 8430                   |
| <b>Итого [52]</b>    | <b>549793</b> | <b>1031103</b>         | <b>555018</b> | <b>1062124</b>         |               |                        |               |                        |
| Модел-е [41, с. 279] | <b>546552</b> | <b>1025827</b>         | <b>577610</b> | <b>1081900</b>         | <b>581060</b> | <b>1087200</b>         | <b>585100</b> | <b>1093600</b>         |

С помощью представленных данных можно решить ряд задач прогнозирования развития экономики региона, применив представленные в работе методы.

Приведем примеры таких задач. Задачи прогнозирования, решенные в данном разделе, относятся к первому классу задач прогнозирования для модели межотраслевых материальных связей региональной экономики, представленных в [22] (определение сбалансированных выпусков отраслей, обеспечивающих задаваемые варианты конечного спроса), но с использованием преимуществ интервальной модели.

**Прогнозирование увеличения конечного спроса для сельского хозяйства.** На сколько процентов можно увеличить конечное потребление данной отрасли в условиях 2014 г.? Как при этом изменятся объемы производства? Такая задача становится особенно актуальной в настоящее время в связи с распоряжением Правительства Российской Федерации от 2 октября 2014 г. №1948-р «Об утверждении плана мероприятий по содействию импортозамещению в сельском хозяйстве на 2014 - 2015 гг.» [59].

Сформулированная задача является линейной задачей о допусках для интервального уравнения Леонтьева. Задача была решена с помощью двух методов –  $r$ -алгоритма [81] и предложенного в главе 2 диссертации алгоритма SPACIP.

Результаты решения задачи приведены в табл. 4.4–4.6. Анализируя таблицу 4.4, можно заключить, что увеличить конечный спрос даже на 5 % для отрасли 1 «Сельское хозяйство, охота и лесоводство» невозможно без изменения объемов производства для других отраслей, поскольку система интервальных уравнений становится несовместной (см. строки 2, 6, 10 таблицы). Если же задать интервальный вектор  $y$  как  $[1.05 \cdot y_1, 1.1 \cdot y_1], [y_2, 1.2 \cdot y_2], \dots, [y_{15}, 1.2 \cdot y_{15}]$ , то система будет совместной,

Таблица 4.4

Разрешимость линейной задачи о допусках для модели МОБ  
Приморского края

| Степень<br>неопр.<br>м-цы $A$ | Нижн. гр-ца<br>для $y_1$ ,<br>% увелич-я | Макс. увелич-е<br>кон-го спроса<br>для др. отраслей,<br>% | Разреш-ть | Примеч.       |
|-------------------------------|--|---|-----------|---------------|
| 0.001                         | 5  | 0   | -         |               |
| 0.001                         | 5  | 10  | +         | см. табл. 4.5 |
| 0.001                         | 10                                       | 20  | +         |               |
| 0.001                         | 40                                       | 10  | +         | см. табл. 4.6 |
| 0.01                          | 5  | 0   | -         |               |
| 0.01                          | 5  | 10  | -         |               |
| 0.01                          | 10                                       | 20  | +         |               |
| 0.01                          | 40                                       | 10  | -         |               |
| 0.05                          | 5  | 0   | -         |               |
| 0.05                          | 5  | 10  | -         |               |
| 0.05                          | 10                                       | 20  | -         |               |
| 0.05                          | 40                                       | 10  | -         |               |

но только для матрицы коэффициентов прямых производственных затрат с достаточно малой интервальной неопределенностью  $A \pm 0.001 A$  (см. строку 3 таблицы). Результаты решения для этой задачи – найденная точка из допускового множества – приведены в отдельной табл. 4.5. По данным таблицы можно понять, на сколько процентов необходимо будет увеличивать объемы производства для всех отраслей.

Таблица 4.5

Результаты решения задачи об увеличении конечного спроса в сельском хозяйстве на 5 %

| <i>r</i> -алгоритм                     |                     | SPASLIP                                |                     | Интерв-й в-р <i>y</i> , |        | Исходные данные         |                         |
|--|---------------------|--|---------------------|-------------------------|--------|-------------------------|-------------------------|
| <i>x</i> <sub>new</sub> ,<br>млн. руб. | Увеличе-<br>е,<br>% | <i>x</i> <sub>new</sub> ,<br>млн. руб. | Увеличе-<br>е,<br>% | млн. руб.               |        | <i>x</i> ,<br>млн. руб. | <i>y</i> ,<br>млн. руб. |
| 43018                                  | 3.29%               | 42745                                  | 2.63%               | 15768                   | 17345  | 41650                   | 15017                   |
| 43396                                  | 1.10%               | 43238                                  | 0.73%               | 10720                   | 11792  | 42926                   | 10720                   |
| 16359                                  | 2.25%               | 16123                                  | 0.78%               | 2791                    | 3070   | 15999                   | 2791                    |
| 148870                                 | 0.95%               | 148280                                 | 0.55%               | 58474                   | 64321  | 147469                  | 58474                   |
| 69251                                  | 2.99%               | 67698                                  | 0.68%               | 15221                   | 16743  | 67239                   | 15221                   |
| 246830                                 | 0.75%               | 246100                                 | 0.45%               | 163140                  | 179450 | 244995                  | 163140                  |
| 138510                                 | 0.93%               | 137900                                 | 0.48%               | 75698                   | 83268  | 137239                  | 75698                   |
| 9235                                   | 1.47%               | 9180                                   | 0.87%               | 1049                    | 1154   | 9101                    | 1049                    |
| 195400                                 | 0.59%               | 195070                                 | 0.42%               | 144800                  | 159280 | 194249                  | 144803                  |
| 1550                                   | 2.27%               | 1527                                   | 0.72%               | 333                     | 366    | 1516                    | 333                     |
| 65269                                  | 0.86%               | 65049                                  | 0.52%               | 32786                   | 36065  | 64710                   | 32786                   |
| 59528                                  | 2.90%               | 58145                                  | 0.51%               | 36565                   | 40222  | 57853                   | 36565                   |
| 24060                                  | 5.00%               | 23051                                  | 0.60%               | 11687                   | 12856  | 22914                   | 11687                   |
| 36535                                  | 2.25%               | 35938                                  | 0.58%               | 12807                   | 14088  | 35731                   | 12807                   |
| 8563                                   | 1.58%               | 8503                                   | 0.86%               | 2734                    | 3007   | 8430                    | 2734                    |

Если увеличивать размеры интервалов для матрицы  $A$ , то, как видно из табл. 4.4, задача может стать неразрешимой. Поэтому при решении ЛЗД необходимо обосновывать выбор конкретных интервалов для матрицы коэффициентов прямых производственных затрат.

Решение еще одной интересной подзадачи, представленной в строке 5 табл. 4.4 – увеличение конечного спроса на 40 % для отрасли 1 «Сельское хозяйство, охота и лесоводство» при ограничении увеличения конечного спроса в 110 % для других отраслей, также представлено в отдельной табл. 4.6.

Таблица 4.6

Результаты решения задачи об увеличении конечного спроса на 40 % для отрасли 1 при ограничении увеличения конечного спроса в 110 % для других отраслей

| <i>r</i> -алгоритм                     |                 | SPASLIP                                |                 | Интерв-й в-р <i>y</i> , |        | Исходные данные         |                         |
|--|-----------------|--|-----------------|-------------------------|--------|-------------------------|-------------------------|
| <i>x</i> <sub>new</sub> ,<br>млн. руб. | Увеличе-е,<br>% | <i>x</i> <sub>new</sub> ,<br>млн. руб. | Увеличе-е,<br>% | млн. руб.               |        | <i>x</i> ,<br>млн. руб. | <i>y</i> ,<br>млн. руб. |
| 48920                                  | 17.46%          | 49026                                  | 17.71%          | 21024                   | 22526  | 41650                   | 15017                   |
| 43562                                  | 1.48%           | 43653                                  | 1.69%           | 10720                   | 11792  | 42926                   | 10720                   |
| 16273                                  | 1.71%           | 16300                                  | 1.88%           | 2791                    | 3070   | 15999                   | 2791                    |
| 148790                                 | 0.90%           | 149270                                 | 1.22%           | 58474                   | 64321  | 147469                  | 58474                   |
| 68156                                  | 1.36%           | 68362                                  | 1.67%           | 15221                   | 16743  | 67239                   | 15221                   |
| 246560                                 | 0.64%           | 247310                                 | 0.94%           | 163140                  | 179450 | 244995                  | 163140                  |
| 138100                                 | 0.63%           | 138540                                 | 0.95%           | 75698                   | 83268  | 137239                  | 75698                   |
| 9218                                   | 1.29%           | 9238                                   | 1.51%           | 1049                    | 1154   | 9101                    | 1049                    |
| 195320                                 | 0.55%           | 195990                                 | 0.90%           | 144800                  | 159280 | 194249                  | 144803                  |
| 1548                                   | 2.09%           | 1552                                   | 2.37%           | 333                     | 366    | 1516                    | 333                     |
| 65209                                  | 0.77%           | 65412                                  | 1.08%           | 32786                   | 36065  | 64710                   | 32786                   |
| 58244                                  | 0.68%           | 58426                                  | 0.99%           | 36565                   | 40222  | 57853                   | 36565                   |
| 23145                                  | 1.01%           | 23203                                  | 1.26%           | 11687                   | 12856  | 22914                   | 11687                   |
| 36131                                  | 1.12%           | 36216                                  | 1.36%           | 12807                   | 14088  | 35731                   | 12807                   |
| 8522                                   | 1.09%           | 8540                                   | 1.30%           | 2734                    | 3007   | 8430                    | 2734                    |

Другим возможным подходом к решению рассматриваемой задачи является определение строения допускового множества с помощью решения системы линейных неравенств. Такие подходы исследуются в работах И. Рона [148], И.А. Шарой [69]. Как уже отмечалось выше, для задач большой размерности такой подход непригоден из-за экспоненциально большого количества линейных неравенств в системе, которую требуется решить. Для задач малой размерности этот подход тоже может быть не всегда применим, поскольку в результате решения системы линейных неравенств может быть получена точка, лежащая на границе допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Тем не менее для рассматриваемой в данном разделе задачи этот подход был применен на практике. Система линейных неравенств решалась с помощью солверов IBM ILOG CPLEX Optimizer и MOSEK, доступных на сервере NEOS [128]. Точки допускового множества решений были найдены (расхождение с данными третьего столбца табл. 4.5 составило не более 0.5% в меньшую сторону в случае использования CPLEX и не более 2.5% в большую сторону в случае использования MOSEK), но значение распознающего функционала для этих точек оказалось равным  $1e-11$  для CPLEX и  $1e-12$  для MOSEK, что довольно далеко от его истинного максимума (15.45) и не позволяет считать найденную точку подходящей для дальнейшей работы с допусковым множеством.

**4.2.3. Решение серии задач большой размерности с построением профилей производительности.** Для определения производительности предложенного в работе подхода с применением МОП с отсечениями для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса в случае задач большой размерности была решена серия типовых задач прогнозирования, аналогичных задачам, рассмотренным в п. 4.2.2 с

данными, сгенерированными случайным образом:

$$a_{ij} \in [0, 1]; \mathbf{A} = A \pm 0.01A; \underline{\mathbf{b}} \in (0, 1000]; \bar{\mathbf{b}} = 1.2 \underline{\mathbf{b}}. \quad (4.2)$$

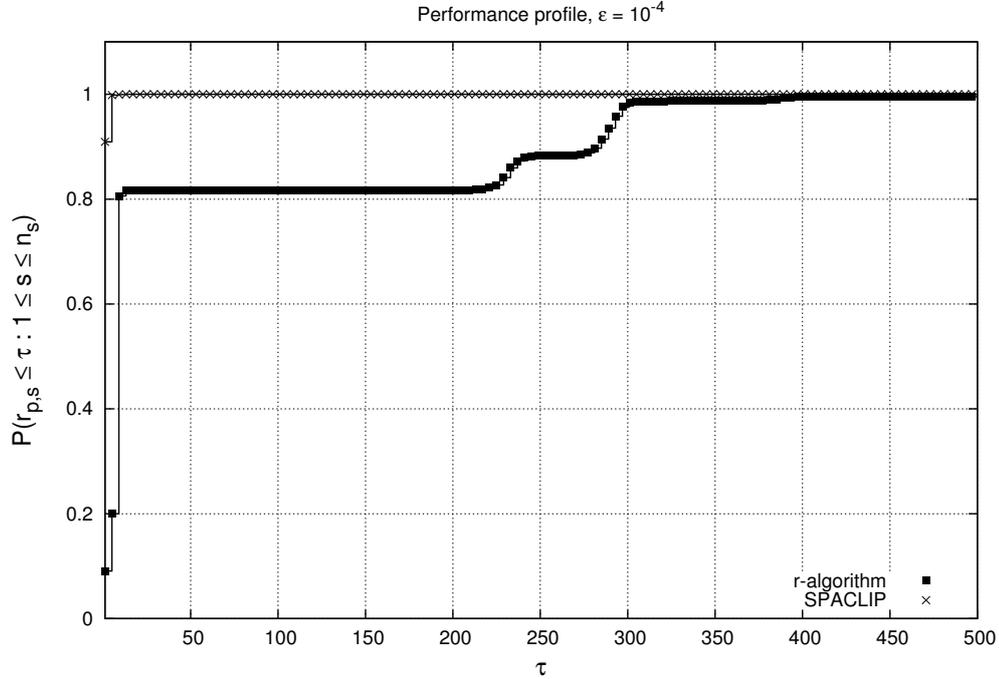


Рис. 4.3. Профили производительности для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по затраченному процессорному времени при решении задачи (4.2),  $m = n = 10$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-4}$

Сначала была решена серия из 5000 задач малой размерности  $m = n = 10$ , результаты представлены на рис. 4.3– 4.4. Для решения задачи НДО максимизации распознающего функционала применялись  $r$ -алгоритм и представленный в данной работе алгоритм SPACLIP. Видно преимущество алгоритма SPACLIP.

Максимальная размерность задач такого типа, которые были решены с помощью созданного комплекса программ,  $m = n = 100$ . Результаты решения серии из 100 задач такой размерности представлены на рис. 4.5– 4.6. Преимущество алгоритма SPACLIP и по затраченному процессорному времени, и по количеству обращений к оракулу стало еще более существенным.

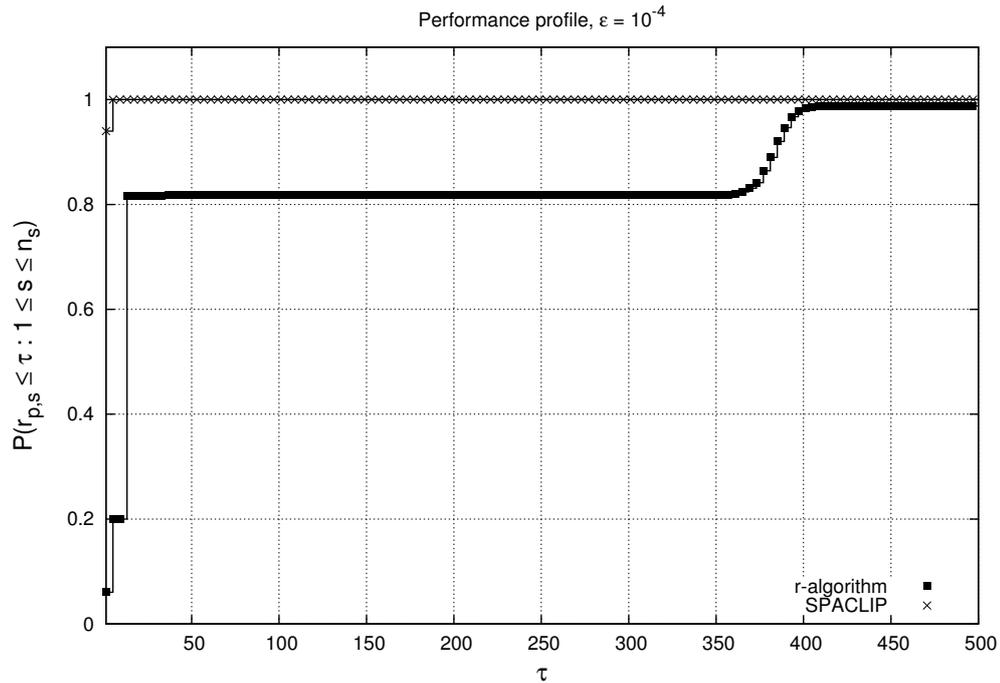


Рис. 4.4. Профили производительности для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по количеству обращений к оракулу при решении задачи (4.2),  $m = n = 10$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-4}$

По результатам проведенных исследований можно сделать следующее заключение: алгоритм SPACLIP особенно рекомендуется применять для решения задач средних, больших и сверхбольших размерностей, либо в случаях, когда требуется высокая точность решения задачи.

**4.2.4. Определение разрешимости интервальных систем линейных уравнений.** Для точечной матрицы  $A$  в интервальной системе  $Ax = \mathbf{b}$  объединенное и допусковое множество решений совпадают. Распознающий функционал также вычисляется по формуле (1.6), поэтому описанный в главе 1 метод исследования разрешимости ЛЗД также можно использовать для определения разрешимости интервальных систем

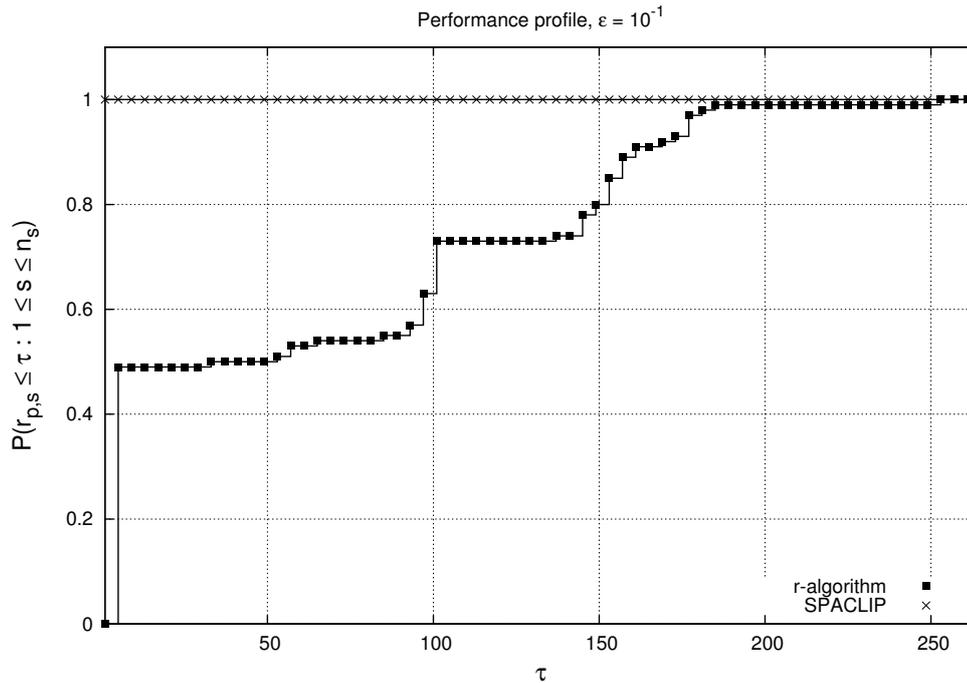


Рис. 4.5. Профили производительности для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по затраченному процессорному времени при решении задачи (4.2),  $m = n = 100$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-1}$

линейных уравнений с точечными матрицами.

**Определение 4.1.** [72] *Интервальная система уравнений  $Ax = \mathbf{b}$  является разрешимой, если существует такой вектор  $b \in \mathbf{b}$ , что точечная система уравнений  $Ax = b$  имеет решение.*

Разрешимость интервальной системы уравнений равносильна непустоте ее множества решений.

Следует отметить, что в случае интервальной матрицы системы уравнений распознающий функционал становится многоэкстремальным, поэтому в этом случае для решения задачи его максимизации необходимо применять методы глобальной оптимизации. Другим подходом является применение универсального метода определения разрешимости интервальной линейной системы с помощью решения определенных систем линейных неравенств. В худшем случае это требует решения

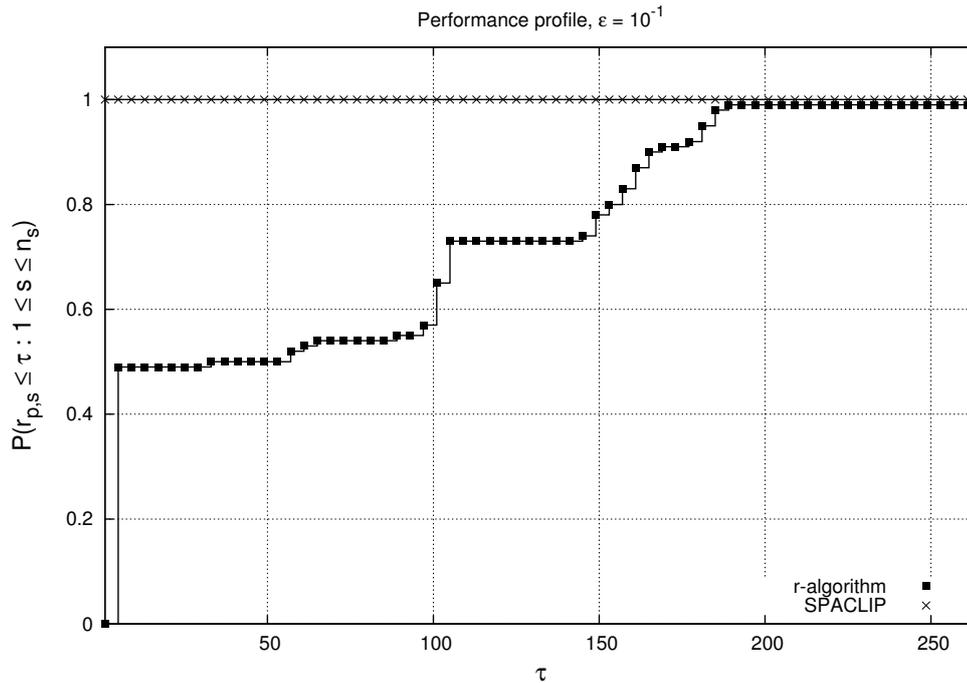


Рис. 4.6. Профили производительности для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по количеству обращений к оракулу при решении задачи (4.2),  $m = n = 100$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-1}$

экспоненциально большого ( $2^n$ ) числа систем неравенств [73]. Данный результат не может быть улучшен в силу NP-трудности решаемой задачи [37, 73]. Поэтому универсальный метод практичен лишь при решении задач малой размерности.

Для определения разрешимости ИСЛАУ была использована свободно распространяемая программа С.П. Шарого (ИВТ СО РАН, г. Новосибирск) для построения линейной интервальной регрессии методом максимума согласования, доступная на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу **URL:** <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/index.php>. В данной программе для максимизации распознающего функционала используется  $r$ -алгоритм [81]. Также на основе данной программы был написан ее модифицированный вариант на языке `octave`, использующий для

решения задачи негладкой оптимизации метод SPACLIP (см. главу 2). При этом задача на максимум вогнутой функции была заменена задачей на минимум выпуклой функции.

В тестовых задачах матрица  $A$  размерности  $m \times n$  интервальной системы уравнений и вектор  $\mathbf{b}$  размерности  $m \times 2$  нижних и верхних границ правой части ИСЛАУ генерировались случайным образом. Все элементы матрицы  $A$  принадлежат отрезку  $[0, 10]$ , у вектора  $\mathbf{b}$ :  $\underline{\mathbf{b}} \in (0, 10)$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}} + 100$ .

Тестирование проводилось на стандартной машине под управлением ОС Linux, дистрибутив openSUSE 12.3 Dartmouth, процессор AMD Athlon 64 3500+, 2 Гб оперативной памяти; версия интерпретатора octave 3.6.4.

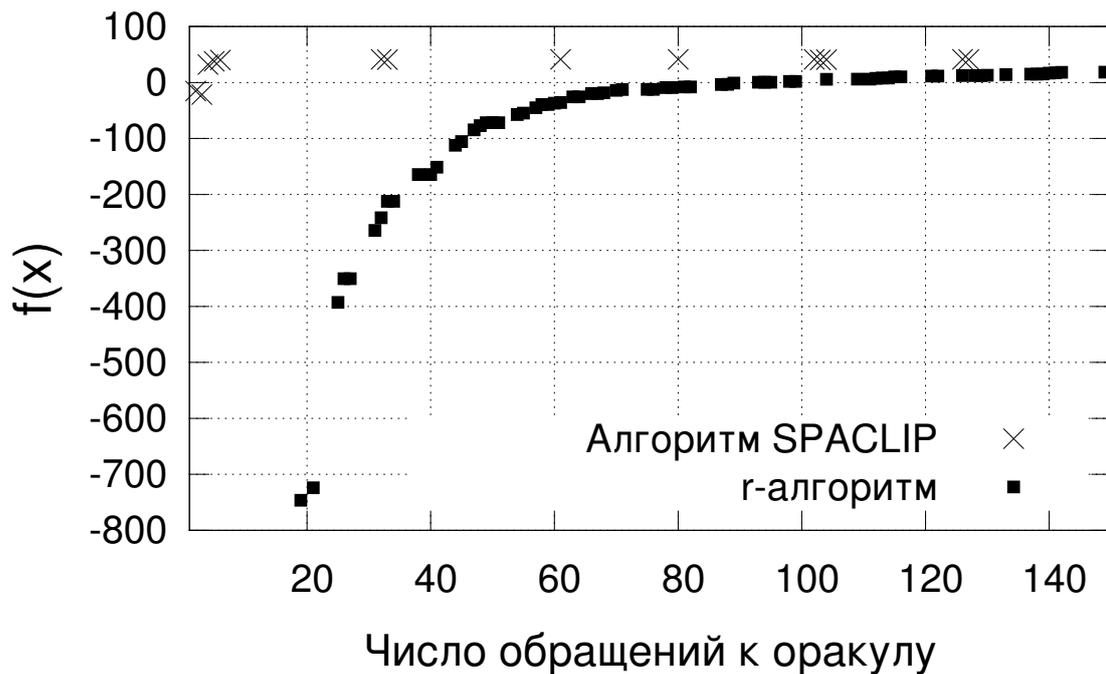


Рис. 4.7. Скорость подъема к максимуму при решении задачи большой размерности определения разрешимости ИСЛАУ методами НДО

Максимальное количество элементов матрицы  $A$  для задачи, которую удалось решить, составляет  $10^7$  ( $m = 10\,000$ ,  $n = 1\,000$ ). При этом алгоритм SPACLIP практически во всех случаях при заданной точности

решения задачи  $10^{-10}$  поднимался к максимуму быстрее  $r$ -алгоритма. Скорость подъема к максимуму для одной из таких задач представлена на рис. 4.7. Для задач такой размерности прекращение работы алгоритмов происходило по превышению максимального количества итераций, другие критерии выхода не срабатывали.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Сделано описание интервальной модели межотраслевого экономического баланса. Создана модель задачи на языке моделирования AMPL. Изучены, описаны и применены на практике различные способы исследования разрешимости линейной задачи о допусках для этой модели.
2. Предложен быстрый алгоритм одномерного поиска для задач негладкой оптимизации, имеющий квадратичную скорость сходимости. Проведено теоретическое обоснование данного алгоритма. Сделана реализация данного алгоритма на языке программирования octave. Проведена серия вычислительных экспериментов с построением профилей производительности для сравнительного анализа данного алгоритма с другими методами одномерной минимизации.
3. Предложен и обоснован новый эффективный численный метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенный для решения многомерных задач выпуклой недифференцируемой оптимизации. Метод относится к оракульному типу. Доказана сходимость метода отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями. Сделаны реализации метода отделяющих плоскостей и метода отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями (алгоритм SPACLIP) на языке программирования octave.
4. Создан комплекс проблемно-ориентированных программ для решения задач негладкой минимизации методами семейства отделяющих плоскостей, для определения разрешимости линейной задачи о допусках для интервальных систем линейных

алгебраических уравнений методом распознающего функционала, для построения профилей производительности вычислительных методов. Программный комплекс применяется для проведения вычислительных экспериментов с применением технологии математического моделирования.

5. Проведена серия вычислительных экспериментов с построением профилей производительности для детального сравнительного анализа МОП, SPACIP и других методов негладкой минимизации. Вычислительные эксперименты показали высокую эффективность и надежность предложенных методов для решения задач НДО и их приемлемую скорость сходимости.
6. Методы, предложенные в главах 2 и 3, успешно применены для решения ряда задач с применением методов интервального анализа. В частности, решена задача оценки перспектив развития экономики Приморского края. Данная задача рассматривается как линейная задача о допусках для интервальной системы линейных уравнений. Сравнение предложенных в работе новых методов с другими известными методами при решении практических задач показало очевидные преимущества предложенных в работе методов.

## Литература

1. *Алефельд, Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
2. *Анциферов, Е. Г.* Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании / Е. Г. Анциферов, В. П. Булатов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987. – Т. 27. – № 3. – С. 377–384.
3. *Васильев, Ф. П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. / Ф. П. Васильев. – М. : МНЦМО, 2011. – Кн. 1. – 620 с.
4. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятности / Е. С. Вентцель. – М. : Физматгиз, 1962. – 563 с.
5. *Воронцова, Е. А.* Использование одномерного поиска в релаксационных субградиентных методах / Е. А. Воронцова // Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления. Всероссийская научн. конф., посвящ. 75-летию со дня рожд. акад. В. П. Мясникова: сб. докл. [Электронный ресурс]. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2011. – С. 565–569.
6. *Воронцова, Е. А.* О быстром алгоритме линейного поиска в кусочно-гладкой выпуклой оптимизации / Е. А. Воронцова // Тр. XV Байкальской междунар. шк.-сем. «Методы оптимизации и их приложения». Т.2 «Математическое программирование». – Иркутск : РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 44–48.
7. *Воронцова, Е. А.* Быстро сходящийся алгоритм линейного поиска в недифференцируемой оптимизации / Е. А. Воронцова // Информатика и системы управления. – 2012. – № 2. – С. 39–48.
8. *Воронцова, Е. А.* Исследование быстрого алгоритма линейного поиска в негладкой оптимизации / Е. А. Воронцова // Матер. 3-й междунар. конф. «Матем. моделир-е, оптимизация и информац-

- е технологии», г. Кишинэу, респ. Молдова, 19–23 марта 2012 г. – Кишинэу, 2012. – С. 265–271.
9. *Воронцова, Е. А.* Метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями / Е. А. Воронцова // XXXVI Дальневосточная математическая шк.-сем. им. акад. Е.В. Золотова, 04 сент. – 10 сент. 2012 г., Владивосток: сб. материалов [Электронный ресурс]. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. – С. 459–461.
10. *Воронцова, Е. А.* Монотонный метод отделяющих плоскостей / Е. А. Воронцова // Матер. V Всероссийской конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск, 02–06 июля 2012 г. – Омск, 2012. – С. 176.
11. *Воронцова, Е. А.* Решение задач большой размерности методом отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями / Е. А. Воронцова // Тезисы докладов II Российско-монгольской конф. молодых ученых по матем. моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск (Россия) – Ханх (Монголия), 25 июня – 1 июля 2013 г. – Иркутск : РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. – С. 22.
12. *Воронцова, Е. А.* Метод отделяющих плоскостей для решения негладких экстремальных задач и его применение в транспортных задачах / Е. А. Воронцова // Тезисы докладов XVI Байкальской международной шк.-сем. «Методы оптимизации и их приложения», 30/06/2014 - 06/07/2014. – Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 97.
13. *Воронцова, Е. А.* Определение разрешимости интервальных систем линейных уравнений большой размерности / Е. А. Воронцова // Матер. XXXVIII Дальневосточной математической шк.-сем. им. акад. Е.В. Золотова, 01/09/2014 - 05/09/2014. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2014. – С. 508–511.

14. *Воронцова, Е. А.* Решение транспортной задачи методами недифференцируемой оптимизации / Е. А. Воронцова // Современные проблемы математики: Матер. Всероссийской научно-практической конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, приур. к 105-летию педагогического образования на Дальнем Востоке, 2–5 декабря 2014 г. – Владивосток : ДВФУ, 2014. – С. 48.
15. *Воронцова, Е. А.* Сравнительная оценка эффективности оптимизационных методов с построением профилей производительности / Е. А. Воронцова // Современные проблемы математики: Матер. Всероссийской научно-практической конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, приур. к 105-летию педагогического образования на Дальнем Востоке, 2–5 декабря 2014 г. – Владивосток : ДВФУ, 2014. – С. 49.
16. *Воронцова, Е. А.* Определение разрешимости интервальной линейной задачи о допусках методом отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями / Е. А. Воронцова // Матер. VI Международной конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», г. Омск, 28 июня – 4 июля 2015 г. – Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2015. – С. 92.
17. *Воронцова, Е. А.* Решение транспортных задач методами негладкой оптимизации / Е. А. Воронцова // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования № 13. Научное издание. – Екатеринбург : ИММ УрО РАН, 2015. – С. 79–80.
18. *Воронцова, Е. А.* Синтез секущих и отделяющих плоскостей в одном методе негладкой оптимизации / Е. А. Воронцова, Е. А. Нурминский // Кибернетика и системный анализ. 2015. – Т. 51, № 4. – С. 137–150.
19. *Воцинин, А. П.* Задачи анализа с неопределенными данными – интервальность и/или случайность? / А. П. Воцинин // Рабочее

- совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений ИМРО'04, Новосибирск, 21-22 июня 2004 г. (в рамках международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004). – С. 147–158.
20. *Гальперин, В. М.* Микроэкономика: В 2-х т. / В. М. Гальперин, С. М. Игнатъев, В. И. Моргунов; под общ. ред. В. М. Гальперина. – СПб. : «Экономическая школа», Санкт-Петербургский госуд. унив-т экономики и финансов, ВШЭ, 1998. – Т. 2. – 503 с.
21. *Гольштейн, Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
22. *Гранберг, А. Г.* Основы региональной экономики / А. Г. Гранберг. – 3-е изд. – М. : ВШЭ, 2003. – 495 с.
23. *Демьянов, В. Ф.* Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
24. *Демьянов, В. Ф.* Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
25. *Дрейпер, Н.* Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – 3-е изд. – М. : Вильямс, Диалектика, 2007. – 912 с.
26. *Евтушенко, Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – М. : Наука, 1982. – 432 с.
27. *Еремин, И. И.* Обобщение релаксационного метода Моцкина–Агмона / И. И. Еремин // Успехи матем. наук. – 1965. – Т. 20, № 2(122). – С. 183–187.
28. *Еремин, И. И.* Двойственность для несобственных задач линейного программирования / И. И. Еремин // Матем. заметки. – 1982. – 32:2. – С. 229–238.

29. *Ермольев, Ю. М.* Методы решения нелинейных экстремальных задач / Ю. М. Ермольев // Кибернетика. – 1966. – № 4. – С. 1–17.
30. *Зоркальцев, В. И.* Двойственные алгоритмы внутренних точек / В. И. Зоркальцев // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 4. – С. 33–53.
31. *Зоркальцев, В. И.* Проекция точки на полиэдр / В. И. Зоркальцев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 1. – С. 4–19.
32. *Измаилов, А. Ф.* Численные методы оптимизации / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
33. *Иоффе, А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
34. *Калмыков, С. А.* Методы интервального анализа / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск : Наука, 1986. – 222 с.
35. *Канторович, Л. В.* Математические методы в организации и планировании производства / Л. В. Канторович. – Л. : ЛГУ, 1939. – 67 с.
36. *Кларк, Ф.* Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. – М. : Наука, 1988. – 280 с.
37. *Лакеев, А. В.* О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью / А. В. Лакеев, С. И. Носков // Сибирский матем. журнал. – 1994. – Т. 35, № 5. – С. 1074–1084.
38. *Левин, А. Ю.* Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций / А. Ю. Левин // Докл. АН СССР. – 1965. – 160. – № 6. – С. 1244–1247.
39. *Леонтьев, В.* Исследование структуры американской экономики: Теоретич. и эмпирич. анализ по схеме затраты-выпуск / В. Леонтьев и др.; под ред. А. А. Конюса. – М. : Госстатиздат, 1958. – 640 с.
40. *Ляпин, Д. С.* Программно-математические средства моделирования системных связей на основе анализа интервальных данных : дис. ...

- канд. техн. наук : 05.13.01 / Ляпин Дмитрий Сергеевич. – М., 2006. – 121 с.
41. *Машунин, Ю. К.* Прогнозирование развития экономики региона с использованием таблиц «затраты – выпуск» / Ю. К. Машунин, И. А. Машунин // Экономика региона. – 2014. – № 2. – С. 276–289.
  42. *Немировский, А. С.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации / А. С. Немировский, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
  43. *Нестеров, Ю. Е.* Метод решения задач выпуклого программирования с трудоемкостью  $O(1/k^2)$  / Ю. Е. Нестеров // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 3. – С. 543–547.
  44. *Нестеров, Ю. Е.* Разработка и исследование методов решения вырожденных задач оптимизации : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.02 / Нестеров Юрий Евгеньевич. – М., 1984. – 106 с.
  45. *Нестеров, Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию / Ю. Е. Нестеров. – М. : МЦНМО, 2010. – 280 с.
  46. *Нестеров, Ю. Е.* Алгоритмическая выпуклая оптимизация : дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.07 / Нестеров Юрий Евгеньевич. – М., 2013. – 367 с.
  47. *Нурминский, Е. А.* Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач / Е. А. Нурминский. – Киев : Наукова думка, 1979. – 161 с.
  48. *Нурминский, Е. А.* Численные методы выпуклой оптимизации / Е. А. Нурминский. – М. : Наука, 1991. – 168 с.
  49. *Нурминский, Е. А.* О сходимости метода подходящих аффинных подпространств для решения задачи о наименьшем расстоянии до симплекса / Е. А. Нурминский // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2005. – Т. 45, вып. 11. – С. 1996–2004.

50. *Нурминский, Е. А.* Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации / *Е. А. Нурминский // Вычислительные методы и программирование.* – 2006. – Т. 7. – С. 133–137.
51. *Нурминский, Е. А.* Быстрый алгоритм линейного поиска в кусочно-гладкой выпуклой оптимизации (Fast line-search) / *Е. А. Нурминский, Е. А. Воронцова. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615977 (02.08.2011).*
52. *Приморский край.* Социально-экономические показатели: Статистический ежегодник. – Владивосток : Приморскстат, 2014. – 361 с.
53. *Поляк, Б. Т.* Один общий метод решения экстремальных задач / *Б. Т. Поляк // Докл. АН СССР.* – 1967. – 174. № 1. – С. 33–36.
54. *Поляк, Б. Т.* Минимизация негладких функционалов / *Б. Т. Поляк // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1969. – Т. 9, № 3. – С. 509–521.
55. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / *Б. Т. Поляк.* – Изд. 2-е, испр. и доп. – М. : ЛЕНАНД, 2014. – 392 с.
56. *Пшеничный, Б. Н.* Необходимые условия экстремума / *Б. Н. Пшеничный.* – М. : Наука, 1969. – 152 с.
57. *Пшеничный, Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / *Б. Н. Пшеничный.* – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 320 с.
58. *Распоряжение от 14 февраля 2009 г. № 201-р Правительства Российской Федерации ... о разработке базовых таблицы «затраты — выпуск» за 2011 год. [Электронный ресурс].* – Режим доступа: **URL:** [http://www.gks.ru/free\\_doc/new\\_site/vvp/zatr-vip/zatr\\_vip.htm](http://www.gks.ru/free_doc/new_site/vvp/zatr-vip/zatr_vip.htm). Дата обращения: 02.09.2015 г.

59. *Распоряжение от 2 октября 2014 г. № 1948-р Правительства Российской Федерации* Об утверждении плана мероприятий по содействию импортозамещению в сельском хозяйстве на 2014 – 2015 гг. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: **URL:** <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70658674/>. Дата обращения: 03.09.2015 г.
60. *Решетняк, Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду / Ю. Г. Решетняк // Матем. сб. – 1968. – 75(117):3. – С. 323–334.
61. *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 470 с.
62. *Сергиенко, И. В.* Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований / И. В. Сергиенко, М. В. Михалевич, П. И. Стецюк, Л. Б. Кошлай // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 26–49.
63. *Сергиенко, И. В.* О трех научных идеях Н.З. Шора / И. В. Сергиенко, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 1. – С. 4–22.
64. *Соколов, Н. А.* Обобщенный метод уровней с приложением к декомпозиции : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 / Соколов Николай Александрович. – М., 2008. – 102 с.
65. *Стецюк, П. И.* Транспортная задача и ортогональное проектирование на линейные многообразия / П. И. Стецюк, Е. А. Нурминский, Д. И. Соломон // Материалы V-й международной научной конференции «Транспортные системы и логистика» (г. Кишиневу, Молдова, 11–13 декабря 2013 г.). – Кишиневу : Эврика, 2013. – С. 251–263.

66. *Сухарев, А. Г.* Курс методов оптимизации: учеб. пособие / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – 2-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
67. *Хачиян, Л. Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании / Л. Г. Хачиян // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 5. – С. 1093–1096.
68. *Хлебалин, Н. А.* Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта / Н. А. Хлебалин // Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов : Саратовский политехнический институт, 1981. – С. 107–123.
69. *Шарая, И. А.* Допусковое множество решений как проекция выпуклого многогранного множества / И. А. Шарая // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12, № 6. – С. 124–137.
70. *Шарый, С. П.* Решение интервальной линейной задачи о допусках / С. П. Шарый // Автоматика и Телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 147–162.
71. *Шарый, С. П.* Исследование разрешимости интервальной линейной задачи о допусках / С. П. Шарый // Материалы 3-й междунар. конф. «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии», г. Кишинэу, респ. Молдова, 19-23 марта 2012 г. – Кишинэу, 2012. – С. 540–549.
72. *Шарый, С. П.* Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределенностями / С. П. Шарый // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 111–125.
73. *Шарый, С. П.* Конечномерный интервальный анализ [Электронный ресурс] / С. П. Шарый. – Новосибирск : изд-во «XYZ», 2015. – Режим доступа: **URL:** <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks>.
74. *Широков, А. П.* Математические модели и методы в управлении транспортными системами. Учебно-методическое пособие. В 2-х

- частях. Часть 2. Решение транспортных задач методами линейного программирования / А. П. Широков. – Хабаровск : ДВГУПС, 1999. – 51 с.
75. *Шор, Н. З.* Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи / Н. З. Шор // В кн.: Материалы науч. семинара по теорет. и прикл. вопр. кибернетики и исслед. операций: Науч. совет по кибернетике АН УССР, вып. 1. – Киев, 1962. – С. 9–17.
76. *Шор, Н. З.* Обобщенный градиентный спуск / Н. З. Шор // Тр. I Зим. школы по мат. программированию. – 1969. – Вып. 3. – С. 578–585.
77. *Шор, Н. З.* Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования / Н. З. Шор // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.
78. *Шор, Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н. З. Шор. – Киев : Наук. думка, 1979. – 200 с.
79. *Шор, Н. З.* Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации: Сб. избранных трудов / Н. З. Шор. – Кишинэу : Эврика, 2012. – 269 с.
80. *Шор, Н. З.* Метод растяжения пространства для ускорения сходимости в задачах овражного типа / Н. З. Шор, В. И. Билецкий // Тр. семинара Науч. совета АН УССР по кибернетике «Теория оптимальных решений». – Киев, 1969. – № 2. – С. 3–18.
81. *Шор, Н. З.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов / Н. З. Шор, Н. Г. Журбенко // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 51–59.
82. *Шор, Н. З.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация / Н. З. Шор, С. И. Стеценко. – Киев : Наук. думка, 1989. – 208 с.

83. *Юдин, Д. Б.* Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач / Д. Б. Юдин, А. С. Немировский // Экономика и мат. методы. – 1976. – Вып. 2. – С. 357–369.
84. *Bagirov, A. M.* Continuous subdifferential approximations and their applications / A. M. Bagirov // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – Vol. 115(5). – P. 2567–2609.
85. *Bagirov, A. M.* A quasisecant method for minimizing nonsmooth functions / A. M. Bagirov, A. N. Ganjehlou // Optimization Methods and Software. – 2010. – Vol. 25(1). – P. 3–18.
86. *Bagirov, A. M.* Discrete gradient method: A derivative free method for nonsmooth optimization / A. M. Bagirov, B. Karasozen, M. Sezer // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2008. – Vol. 137. – P. 317–334.
87. *Bellman, G.* Decision making in fuzzy environment / G. Bellman, L. Zadeh // Management Science. – 1970. – Vol. 17, № 1. – P. 141–164.
88. *Berghen, F. V.* Optimization algorithm for Non-Linear, Constrained, Derivative-free optimization of Continuous, High-computing-load, Noisy Objective Functions. Technical report / F. V. Berghen. – Belgium : IRIDIA, Université Libre de Bruxelles. – May 2004. – Available at **URL:** <http://www.applied-mathematics.net>.
89. *Bertsekas, D. P.* Steepest Descent for Optimization Problems With Nondifferentiable Cost Functions / D. P. Bertsekas, S. K. Mitter // Proc. 5th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems. – Princeton, N.J., March 1971.
90. *Bertsekas, D.* Nondifferentiable Optimization via Approximation / D. Bertsekas // Math. Program. – 1975. – № 3. – P. 1–25.

91. *Bonnans, J.-F.* Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects / J.-F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. A. Sagastizábal. – 2nd ed. – USA : Springer, 2006. – 494 p.
92. *Burke, J. V.* A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization / J. V. Burke, A. S. Lewis, M. L. Overton // SIAM Journal on Optimization. – 2005. – Vol. 15(3). – P. 751–779.
93. *Byrd, R. H.* Representations of quasi-Newton matrices and their use in limited memory methods / R. H. Byrd, J. Nocedal, R. B. Schnabel // Math. Program. – 1994. – Vol. 63. – P. 129–156.
94. *Cheney, E. W.* Newton's method for convex programming and Tchebycheff approximation / E. W. Cheney, A. A. Goldstein // Numerische Mathematik. – 1959. – № 1. – P. 253–268.
95. *Christ, C. F.* A Review of Input-Output Analysis / C. F. Christ // In: Input-Output Analysis: An Appraisal. – Princeton University Press, 1955. – P. 137–182.
96. *Clarke, F. H.* Optimization and Nonsmooth Analysis / F. H. Clarke. – New York : Wiley Interscience, 1983. – 308 p.
97. *Clarke, F. H.* Nonsmooth Analysis and Control Theory / F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski. – New York : Springer, 1998. – 279 p.
98. *Dantzig, G. B.* Linear Programming and Extensions / G. B. Dantzig. – Princeton : Princeton University Press, 1963. – 621 p.
99. *Dolan, E.* Benchmarking optimization software with performance profiles / E. Dolan, J. More // Math. Program. – 2002. – Vol. 91. – P. 201–213.
100. *Fourer, R.* AMPL. A Modeling Language for Mathematical Programming / R. Fourer, D. M. Gay, B. W. Kernighan. – 2nd ed. – Canada : Thomson Learning Academic Resource Center, 2003. – 518 p.

101. *Frangioni, A.* Generalized bundle methods / A. Frangioni. // SIAM Journal on Optimization. – 2002. – 13. – P. 117–156.
102. *Gale, D.* Linear programming and the theory of games / D. Gale, H. W. Kuhn, A. W. Tucker // In: Activity Analysis of Production and Allocation (ed. Koopmans T. C.), vol. 13 of Cowles Commission for Research in Economics Monographs. – Wiley, 1951. – P. 317–335.
103. *Gutowski, M. W.* Interval straight line fitting / M. W. Gutowski // arXiv preprint arXiv:math.SC/0108163. – 2001.
104. *Haarala, N.* Globally convergent limited memory bundle method for large-scale nonsmooth optimization / N. Haarala, K. Miettinen, M. M. Mäkelä // Math. Program. – 2007. – Vol. 109(1). – P. 181–205.
105. *Helmberg, C.* A Spectral Bundle Method for Semidefinite Programming / C. Helmberg, F. Rendl // SIAM Journal on Optimization. – 1999. – Vol. 10, issue 3. – P. 673–696.
106. *Helmberg, C.* The ConicBundle Library for Convex Optimization [Электронный ресурс] / C. Helmberg. – Режим доступа: **URL:** <http://www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/ConicBundle>.
107. *Hiriart-Urruty, J.-B.* Convex analysis and minimization algorithms II: Advanced theory and bundle methods. Fundamental Principles of Mathematical Sciences 306 / J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. – Berlin : Springer-Verlag, 1993. – 348 p.
108. *Jerrell, M. E.* Applications of interval computations to regional economic input-output models / M. E. Jerrell // Applications of interval computations (R. B. Kearfott, V. Kreinovich, ed.). – Dordrecht : Kluwer, 1996. – P. 133–143.
109. *Karmitsa, N.* Comparing different nonsmooth minimization methods and software / N. Karmitsa, A. Bagirov, M. M. Mäkelä // Optimization Methods and Software. – 2012. – Vol. 27. – P. 131–153.

110. *Kelley, J. E.* The cutting plane method for solving convex programs / J. E. Kelley // Journal of the SIAM. – 1960. – Vol. 8 (4). – P. 703–712.
111. *Kiwiel, K. C.* An aggregate subgradient method for nonsmooth convex minimization / Kiwiel K. C. // Math. Program. – 1983. – Vol. 27. – P. 320–341.
112. *Kiwiel, K. C.* Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization / Kiwiel K. C. // Math. Program. – 1990. – Vol. 46. – P. 105–122.
113. *Lancelot: a Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization (Release A).* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: **URL:** <http://www.numerical.rl.ac.uk/lancelot/manual.html>. – Дата обращения: 05.09.2015 г.
114. *Lemaréchal, C.* An algorithm for minimizing convex functions / C. Lemaréchal // In: Information Processing (Rosenfeld J. L., ed.). – North Holland, 1974. – P. 552–556.
115. *Lemaréchal, C.* An extension of Davidon methods to nondifferentiable problems / C. Lemaréchal // In: Nondifferentiable Optimization (M. L. Balinski, P. Wolfe, eds.). – Mathematical Programming Study. – 1975. – № 3. – P. 95–109.
116. *Lemaréchal, C.* Nonsmooth optimization and descent methods / C. Lemaréchal // Research Report 78–4. A-2361. – Austria, Laxenburg : International Institute for Applied Systems Analysis, 1978.
117. *Lemaréchal, C.* New variants of bundle methods / C. Lemaréchal, A. Nemirovskii, Yu. Nesterov // Math. Program. – 1995. – Vol. 69. – P. 111–148.
118. *Lukšan, L.* A bundle-Newton method for nonsmooth unconstrained minimization / L. Lukšan, J. Vlček // Math. Program. – 1998. – Vol. 83. – P. 373–391.

119. *Lukšan, L.* Globally convergent variable metric method for convex nonsmooth unconstrained minimization / L. Lukšan, J. Vlček // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1999. – Vol. 102(3). – P. 593–613.
120. *Mäkelä, M. M.* Nonsmooth Optimization: Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control / M. M. Mäkelä, P. Neittaanmäki. – Singapore : World Scientific Publishing Co., 1992. – 255 p.
121. *Mifflin, R.* A modification and an extension of Lemaréchal’s algorithm for nonsmooth minimization / R. Mifflin // Mathematical Programming Study. – 1982. – № 17. – P. 77–90.
122. *Mifflin, R.* A VU-algorithm for convex minimization / R. Mifflin, C. Sagastizábal // Math. Program. – 2005. – Vol. 104. – P. 583–608.
123. *Mifflin, R.* A Science Fiction Story in Nonsmooth Optimization Originating at IIASA / R. Mifflin, C. Sagastizábal // *Documenta Math.* – Extra Volume: Optimization Stories. – 2012. – P. 291–300.
124. *Mifflin, R.* A bracketing technique to ensure desirable convergence in univariate minimization / R. Mifflin, J. Strodiot // Math. Program. – 1989. – Vol. 43. – P. 117–130.
125. *Mifflin, R.* A rapidly convergent five-point algorithm for univariate minimization / R. Mifflin, J. Strodiot // Math. Program. – 1993. – Vol. 62. – P. 299–319.
126. *Miller, R. E.* Input–Output Analysis: Fondation and Extensions / R. E. Miller, P. D. Blair. – Cambridge University Press, 2009. – 751 p.
127. *Moore, R. E.* Interval analysis / R. E. Moore. – Englewood, Cliffs, N.Y. : Prentice-Hall, 1966. – 191 p.
128. *NEOS Server: State-of-the-Art Solvers for Numerical Optimization.* [Электронный ресурс]. **URL:** <http://neos-server.org/neos/>. – Дата обращения: 04.09.2015 г.

129. *Nesterov, Yu.* Introductory Lectures on Convex Optimization: A basic course / Yu. Nesterov. – Boston : Kluwer Academic Publishers, 2004. – 237 p.
130. *Nesterov, Yu.* Smooth minimization of non-smooth functions / Yu. Nesterov // Math. Program. – 2005. – Vol. 103. – P. 127–152.
131. *Nesterov, Yu.* Subgradient methods for huge-scale optimizations problems / Yu. Nesterov // CORE Discussion Papers. – 2012. – № 2. – 21 p.
132. *Nesterov, Yu.* Gradient methods for minimizing composite functions / Yu. Nesterov // Math. Program. – 2013. – Vol. 140. – P. 125–161.
133. *Neumaier, A.* Tolerance analysis with interval arithmetic / A. Neumaier // Freiburger Intervall-Berichte. – 1986. – №. 86/9. – P. 5–19.
134. *Newman, D. J.* Location of maximum on unimodal surfaces / D. J. Newman // Journal of ACM. – 1965. – Vol. 12. – P. 395–398.
135. *Nocedal, J.* Numerical Optimization. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. XXII / J. Nocedal, S. Wright. – 2nd ed. – USA : Springer, 2006. – 664 p.
136. *Nonsmooth Optimization* / C. Lemaréchal, R. Mifflin (eds.). // Proceedings of the IIASA Workshop, March 28 -- April 8, 1977. – Vol. 3. – Oxford, Pergamon Press, 1978. – 191 p.
137. *Nurminski, E.* A quadratically convergent line-search algorithm for piecewise smooth convex optimization / E. Nurminski // Optimization Methods and Software. – 1995. – № 6. – P. 59–80.
138. *Nurminski, E. A.* Envelope stepsize control for iterative algorithms based on Fejer processes with attractants / E. A. Nurminski // Optimization Methods and Software. – 2010. – Vol. 25(1). – P. 97–108.
139. *Nurminski, E. A.* Separating plane algorithms for convex optimization / E. A. Nurminski // Math. Program. – 1997. – Vol. 76. – P. 373–391.

140. *Octave* Page. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: <http://www.gnu.org/software/octave/>. – Дата обращения: 05.09.2015 г.
141. *Polak, E.* Optimization: Algorithms and Consistent Approximations / E. Polak. – New York : Springer, 1997. – 782 p.
142. *Polyak, B. T.* History of mathematical programming in the USSR: analyzing the phenomenon / B. T. Polyak // Math. Program. – 2002. – Vol. 91, № 3. – P. 401–416.
143. *Popova, E. D.* On the unbounded parametric tolerable solution set / E. D. Popova // Numerical Algorithms. – 2015. – Vol. 69, Issue 1. – P. 169–182.
144. *Robinson, S. M.* Linear convergence of epsilon-subgradient descent methods for a class of convex functions / S. M. Robinson // Math. Program. – 1999. – Vol. 86. – P. 41–50.
145. *Rockafellar, R. T.* Convex Analysis / R. T. Rockafellar. – Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1970. – 470 p.
146. *Rohn, J.* Input-output planning with inexact data / J. Rohn // Freiburger Intervall-Berichte. – 1978. – No. 9/78. – P. 1–16.
147. *Rohn, J.* Input-output model with interval data / J. Rohn // Econometrica. – 1980. – V. 48. – P. 767–769.
148. *Rohn, J.* Inner solutions of linear interval systems / J. Rohn // Interval Mathematics. – 1985. – In: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 212 (Nickel K., ed.). – New York : Springer Verlag, 1986. – P. 157–158.
149. *Sharaya, I. A.* Tolerable Solution Set for Interval Linear Systems with Constraints on Coefficients / I. A. Sharaya, S. P. Shary // Reliable Computing. – 2011. – Vol. 15. – № 4. – P. 345–357.
150. *Shary, S. P.* Solving the linear interval tolerance problem / S. P. Shary // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.

151. *Standardized notation in interval analysis* / R. B. Kearfott, M. Nakao, A. Neumaier, S. Rump, S. P. Shary, P. van Hentenryck. **URL:** <http://www.nsc.ru/interval/INotation.pdf>.
152. *Tikhomirov, V. M.* The evolution of methods of convex optimization / V. M. Tikhomirov // The American Mathematical Monthly. – 1996. – Vol. 103, № 1. – P. 65–71.
153. *Vicente, L. N.* An interview with R. Tyrrell Rockafellar / L. N. Vicente // Centro Internacional de Matemática Bulletin. – 2002. – № 12. – P. 19–23.
154. *Vorontsova, E. A.* Separating plane algorithm with additional clipping for convex optimization / E. A. Vorontsova // III International conference «Optimization and applications» (OPTIMA-2012) Proceedings. Costa da Caparica, Portugal, September 23–30, 2012. – P. 254–255.
155. *Vorontsova, E. A.* A Projective Separating Plane Method with Additional Clipping for Non-Smooth Optimization / E. A. Vorontsova // WSEAS Transactions on Mathematics. – 2014. – Vol. 13. – P. 115–121.
156. *Wolfe, P.* A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions / Wolfe P. // In: Nondifferentiable Optimization (M.L. Balinski, P. Wolfe, eds.). Mathematical Programming Study. – 1975. – № 3. – P. 145–173.