АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Ю. И. ШОКИН

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный редактор
акад. Н. Н. Яненко

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1981

УДК 518

Шокин Ю. И. Интервальный анализ.— Новосибирск: Наука, 1981.

Впервые в отечественной литературе систематически изложены основы и методы интервального анализа, который получил в последние годы широкое распространение в вычислительной математике. Рассмотрен ряд интервально-аналитических методов решения дифференциальных уравнений.

Книга будет полезна специалистам по вычислительной и прикладной математике, аспирантам и студентам, специализирующимся в указанных областях математики.

Юрий Иванович Шокин

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный редактор
Николай Николаевич Яненко

Утверждено к печати
Институтом теоретической и прикладной механики
СО АН СССР

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы широкое распространение в вычислительной математике получили методы интервального анализа. Интенсивное развитие и проникновение в различные области математики интервальных методов привело к созыву в 1975 г. Первого Международного симпозиума по интервальной математике. Второй симпозиум проведен в 1980 г. Литература по интервальному анализу в настоящее время насчитывает около восьмисот наименований и достаточно полно отражена в библиографических сборниках [1—3] и работе [4]. На русском языке сейчас опубликовано около двух десятков журнальных статей, принадлежащих в основном автору данной монографии и его ученикам [5—17]. Настоящая книга предоставит читателю возможность познакомиться с методами интервальной математики и, возможно, стимулирует использование этих методов при решении ряда прикладных задач, требующих высокой точности алгоритмов.

Первоначально интервальные методы возникли как средство автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ и впоследствии превратились в один из разделов современной прикладной математики. При этом в основе лежала идея двусторонней аппроксимации, которая при учете погрешностей приводит к необходимости обобщения понятия вещественного числа, а именно, к понятию интервального числа. В монографии Мура [18], по существу, впервые были изложены последовательно основы нового направления в вычислительной математике. Последующие исследования показали, что методы интервального анализа могут служить не только для учета ошибок округления на ЭВМ, но и являются новыми аналитическими методами для теоретических исследований.

Непосредственное применение интервальных методов в вычислительных процессах позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они лежат в определенных интервалах. При этом в получаемые интервалы включаются и встречающиеся в процессе вычислений ошибки округлений. При точно определенных входных данных задачи получаемые интервалы содержат точное решение исходной задачи, и интервальный метод служит для учета ошибок аппроксимации и округлений.

Проблемы интервального анализа можно разделить на три группы: исследование самого множества интервальных чисел как некоторой математической структуры, применение интервальных методов к различным задачам прикладной математики (в частности, в последнее время наметились пути использования интервальных методов в задачах управления и экономики [19, 20]) и программирование интервальных методов. В предлагаемой работе излагаются вопросы, относящиеся ко всем трем группам проблем.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность Н. Н. Яненко за постоянную поддержку данной работы, а также А. Н. Рогалеву за помощь при подготовке рукописи к печати.

Глава I

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

1. Пусть M и D — два частично упорядоченных множества. Обозначим через $S(M)$ и $S(D)$ соответственно множества всевозможных подмножеств M и D. Если не оговорено особо, элементы множеств M, D и отображения D в M будем обозначать маленькими буквами, а элементы множеств $S(D)$, $S(M)$ и отображения $S(D)$ в $S(M)$ — большими буквами. Каждое из множеств D и M будем считать условно полной структурой и обозначим через $H(D)$ и $H(M)$. Отношение порядка в D, M, $H(D)$ и $H(M)$ условимся обозначать одним и тем же символом $\leqslant$.

Напомним (см., например, [21]), что множество, на котором задано отношение порядка, называется *упорядоченным* или *линейно упорядоченным*, если отношение порядка определено для любых двух его элементов, и *частично упорядоченным* — в противном случае. Частично упорядоченное множество называется *структурой*, если всякое его двухэлементное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани, и *полной структурой*, если всякое его непустое подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

В дальнейшем будем считать, что $D \subseteq M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_n$, где $M_i \subseteq M$, а знак $\otimes$ означает декартово произведение.

Если a и $b \in H(M)$ и $a \leqslant b$, то множество $A = [a, b] = \{x | x \in M, a \leqslant x \leqslant b\}$ будем называть *интервалом* на $H(M)$.

Множество всех интервалов на $H(M)$ обозначим через $I(M)$. Если $M = R$ (здесь и всюду ниже R — множество вещественных чисел), то $I(R)$ есть множество замкнутых интервалов на прямой. В этом случае элемент $I(R)$ принято называть *интервальным числом*. Аналогично определяется множество $I(D)$. При $n > 1$ элемент множества $I(D)$ будем называть *интервальным вектором* размерности n.

Очевидны следующие соотношения: $M \subseteq I(M) \subseteq S(M)$, $D \subseteq I(D) \subseteq S(D)$.

Если подмножество $\Gamma \subseteq M$ ограничено, то интервал $Q(\Gamma)$, определяемый правилом $Q(\Gamma) = [\inf\limits_{H(M)} \Gamma, \ \sup\limits_{H(M)} \Gamma]$, назовем *представлением внешним интервалом* множества Γ.

В качестве упражнения читателю предлагается показать, что $Q(\Gamma)$ является наименьшим интервалом, охватывающим Γ, и при $\Gamma \in I(M)$ справедливо равенство $Q(\Gamma) = \Gamma$.

2. Пусть множество M образует поле. Тогда в $I(M)$ можно ввести интервальную арифметику следующим образом:

$$[a, \ b] * [c, \ d] = \{x * y \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\}, \quad (1)$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. При этом, если $*$ означает деление, то $0 \,\overline{\in}\, [c, \ d]$. Нетрудно показать, что эти операции в каждом конкретном случае эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} &[a, \ b] + [c, \ d] = [a + c, \ b + d], \\ &[a, \ b] - [c, \ d] = [a - d, \ b - c], \end{aligned} \quad (2)$$

$$[a, \ b] \cdot [c, \ d] = [\min(ac, \ ad, \ bc, \ bd), \ \max(ac, ad, bc, bd)],$$

$$[a, \ b]/[c, \ d] = [a, \ b] \cdot [1/d, \ 1/c], \quad 0 \,\overline{\in}\, [c, \ d].$$

Поскольку M образует поле, из (1) вытекает замкнутость $I(M)$ относительно интервальной арифметики. Кроме того, из (2) следует, что : 1) вычитание необратно сложению; 2) деление необратно умножению; 3) интервальное сложение и интервальное умножение ассоциативны и коммутативны; 4) закон дистрибутивности, вообще говоря, не выполнен, а выполнено включение $A(B + C) \subseteq AB + AC$, называемое свойством *субдистрибутивности*.

Пусть $M = D = R$. Интервалы вида $[a, \ a]$ будем отождествлять с вещественными числами и писать $a = [a, \ a]$. Таким образом, $R \subset I(R)$.

Сложение и умножение обладают обычными свойствами ассоциативности и коммутативности:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$
$$A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

Нулем сложения является число 0, а единицей умножения — число 1:

$$0 + A = A + 0 = A, \qquad 1 \cdot A = A \cdot 1 = A.$$

Множество $I(R)$ не является полем, поскольку в нем не выполнены следующие свойства поля.

1. Если $\omega(A) = \omega([a, \ b]) = b - a > 0$, то A не имеет обратного элемента относительно сложения. Действительно, пусть $A - B = [a - d, \ b - c] = 0$. Отсюда следует, что $a = d$ и $b = c$. Однако $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ и это влечет $a = b = c = d$, т. е. $\omega(A) = 0$. В $I(R)$, вообще говоря, $A - A \neq 0$, но $A - A = [a - b, \ b - a]$ и всегда содержит нуль.

2. Если $\omega(A) > 0$, то A не имеет обратного элемента относительно умножения. В самом деле, пусть $AB = 1$. Тогда $\min(ac, \ ad, \ bc, \ bd) = 1$ и $\max(ac, \ ad, \ bc, \ bd) = 1$. Эти соотношения справедливы лишь при $ac = ad = bc = bd = 1$. Отсюда должно быть $a = b$, $c = d$ и $ac = 1$. Иными словами, в $I(R)$ вычитание необратно сложению, а деление необратно умножению.

3. Не выполнен закон дистрибутивности:

$$A(B + C) \subseteq AB + AC. \quad (3)$$

Действительно, пусть $C = [e, \ f]$. Тогда

$$\begin{aligned} A(B + C) &= [a, \ b]([c, \ d] + [e, \ f]) = \\ &= [\min(ac + ae, \ ad + af, \ bc + be, \ bd + bf), \\ &\quad \max(ac + ae, \ ad + af, \ bc + be, \ bd + bf)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} AB + AC &= [a, \ b] \cdot [c, \ d] + [a, \ b] \cdot [e, \ f] = \\ &= [\min(ac, \ ad, \ bc, \ bd] + \min(ae, \ af, \ be, \ bf), \\ &\quad \max(ac, \ ad, \ bc, \ bd) + \max(ae, \ af, \ be, \ bf)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для краткости положим $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (ac, ad, bc, bd)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = ae, af, be, bf)$. Тогда для всех $i = 1, 2, 3, 4$ справедливы неравенства

$$\min_j x_j + \min_j y_j \leqslant x_i + y_i \leqslant \max_j x_j + \max_j y_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{6}$$

Сопоставляя (4)—(6), убеждаемся в справедливости (3). Далее, из (6) вытекает, что в (3) равенство выполнено лишь тогда, когда существуют числа $k, l \in (1, 2, 3, 4)$ такие, что $\min_j x_j = x_k$, $\min_j y_j = y_k$, $\max_j x_j = x_l$, $\max_j y_j = y_l$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, тем самым $a(B + C) = aB + aC$.

Интервальная арифметика обладает свойством *монотонности по включению.* Это означает, что из $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$ следует $A * B \subseteq C * D$ при $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Отсюда, в частности, получаем очень важную теорему [18].

Теорема 1. Пусть $A_i \subseteq B_i (i = 1, \ldots, n)$ и $F(X_1, \ldots, X_n)$ есть рациональное интервальное выражение. Тогда $F(A_1, \ldots, A_n) \subseteq F(B_1, \ldots, B_n)$.

Читателю предоставляется доказать самостоятельно на основании рассмотренных выше свойств интервальной арифметики справедливость следующих четырех утверждений:

1) уравнение

$$A + X = B \tag{7}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $\omega(A) \leqslant \omega(B)$;

2) если X_k — решение уравнения (7), то $X_k \subseteq B - A$;

3) пусть X_k есть решение уравнения $AX = B$, где $0 \equiv A$. Тогда $X_k \subseteq B/A$;

4) если $C = (C_{ij})$— квадратная интервальная матрица, причем $\omega(C_{ij}) > 0$ хотя бы для одной пары (i, j), то не существует матрицы C^{-1} такой, что $C^{-1}C = CC^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

3. Пусть G есть множество всех отображений D в M. Множество преобразований P, определенных на G, назовем *алгебраическим*, если P составляет алгебру.

Отображения f и $\varphi \in G$ будем называть *алгебраически эквивалентными* или просто *эквивалентными*, если путем преобразований каждое из них может быть сведено к другому, и писать $f = \varphi$.

Очевидно, что преобразования, позволяющие свести f к φ или φ к f, должны принадлежать P, и это сведение определено неоднозначно.

Алгебраическая эквивалентность является отношением эквивалентности в G, т. е. это отношение рефлексивно: $f = f$, симметрично: если $f = \varphi$, то $\varphi = f$, транзитивно: если $f = \varphi$ и $\varphi = \psi$, то $f = \psi$. Заметим, что если $f = \varphi$, то области значений f и φ совпадают.

Далее, пусть K — множество отображений $I(D)$ в $I(M)$. Эквивалентность в K может быть определена так же, как и в G. И в этом случае справедливы аналогичные свойства отношений, однако классы эквивалентных функций в силу свойств интервальной арифметики и, в частности из-за субдистрибутивности, в K значительно уже.

Для $f \in G$ следующим образом вводится *объединенное расширение*:

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} f(x). \tag{8}$$

В частности, каждому непересекающемуся классу эквивалентных отображений, на которые введенное отношение эквивалентности разбивает G на основании (8), соответствует единственное объединенное расширение.

Сужением функции $F(X;\, B)$ по X, где $X \in I(D)$, B — постоянный интервальный вектор размерности m, состоящий из констант-интервалов, завязанных в F, назовем отображение $\mathcal{F}(x;\, B)$, получающееся из $F(X;\, B)$ при $X = [x, x] = x$, и условимся писать

$$\operatorname*{Rs}_{X \to x} F(X;\, B) = \mathcal{F}(x;\, B). \tag{9}$$

При $B \in D$ вместо (9) будем писать $\operatorname*{Rs}_{X \to x} F(X) = \mathcal{F}(x)$. В частности, может быть, что $\operatorname*{Rs}_{X \to x} F(X) = f(x)$.

Приведем некоторые примеры. Пусть $M = D = R$, $X = [x_1, x_2]$. Тогда оператор Rs в силу введенного определения должен действовать следующим образом:

1) $\operatorname*{Rs}_{X\to x}(X^3+[1,3])=x^3+[1,3]$,

2) $\operatorname*{Rs}_{X\to x}F(X)=\operatorname*{Rs}_{x_1=x_2=x}(1+[\sin x_1, 2+\sin x_2])=$

$=1+[\sin x, 2+\sin x]$

3) $\operatorname*{Rs}_{X\to x}((X^2+2X)/X)=x+2$,

4) $\operatorname*{Rs}_{X\to x}(X-X)=0$.

Теорема 2. Если F и Ψ эквивалентны, то эквивалентны и их сужения.

Доказательство. Пусть $\Pi_1,\ldots,\Pi_k$ — последовательность алгебраических преобразований, позволяющих свести F к Ψ, $\mathrm{Rs}F=f$, $\mathrm{Rs}\,\Psi=\psi$. (Принятая здесь форма записи сужений, как мы увидим ниже, обоснована независимостью результата от типа сужения.) Не исключая общности, можно считать k четным, поскольку сведение друг к другу эквивалентных отображений заключается в последовательных преобразованиях, среди которых обязательно есть попарно обратные. Полагая $k=2l$ в силу коммутативности Π_j $(1\leqslant j\leqslant k)$, которая следует из того факта, что $\Pi_j\in P$ и P образует алгебру, рассматриваемую последовательность преобразований можно записать в виде $\Pi_{r_l}\Pi_l\Pi_{r_{l-1}}\Pi_{l-1}\ldots\Pi_{r_1}\Pi_1$, где $l\leqslant r_i\leqslant 2l(1\leqslant i\leqslant l)$. Причем $\Pi_{r_j}\Pi_j\varphi=\varphi\,(1\leqslant i\leqslant l)$ для любого $\varphi\in K$. Тогда имеем $\mathrm{Rs}\,F=\mathrm{Rs}(\Pi_{r_1}\Pi_1F)=\ldots=\mathrm{Rs}(\Pi_{r_l}\Pi_l\Pi_{r_{l-1}}\Pi_{l-1}\ldots\ldots\Pi_{r_1}\Pi_1F)=\mathrm{Rs}\,\Psi=\psi$. Но $\mathrm{Rs}F=f$, откуда $f=\psi$.

Интервальным расширением функции $f(x)$ назовем такой элемент $F(X)$ множества K, что из $x\in X$ следует $f(x)\in F(X)$, и условимся писать $\operatorname*{Di}_{x\to X}f(x)=F(X)$. Аналогично можно определить $\operatorname*{Di}_{x\to X}\mathscr{F}(x;B)=F(X;B)$. С точки зрения приложений бывает целесообразным определять интервальное расширение более специально, а именно, задавая способ его получения. Подтверждением сказанного могут служить следующие примеры.

1. Пусть $M=D=R$. Функция $F(X)$, получаемая заменой вещественного аргумента x в рациональной функции $f(x)$ интервальным аргументом X с переходом в интервальную арифметику, называется *естественным интервальным расширением* [18]. В этом случае справедлива следующая

Теорема 3 [18]. Если $F(X)$ — естественное интервальное расширение $f(x)$ и каждая компонента вектора $X=(X_1,\ldots,X_n)$ в $F(X)$ встречается не более одного раза, то $F(X)=\bigcup_{x\in X}f(x)$.

Как видно, в этом случае для нахождения области значений $f(x)$ при $x\in X$ достаточно вычислять рациональное интервальное выражение $F(X)$, тогда как, оперируя вещественными функциями, мы должны определить бесконечное множество $\{f(x)\,|\,x\in X\}$.

2. Пусть $M=D=R_M$ (R_M — множество машинных чисел). Тогда интервальное расширение функции $f(x)$ вида $\mathscr{F}(x)=(f(x))_M+[-\varepsilon(x), \varepsilon(x)]$, где $(f(x))_M$ — результат вычисления $f(x)$ на машине, а $\varepsilon(x)$ — абсолютная погрешность $f(x)$, позволяет учитывать ошибки машинного вычисления. При этом $\varepsilon(x)$ оценивается величиной $\varepsilon_0|(f(x))_M|$, где ε_0 — минимальное машинное число.

Посредством оператора Di семейству отображений $\{f(x, b)\,|\,b\in B\}$ можно поставить в соответствие элемент множества K, если вместо b подставить B и перейти к действиям над интервалами. Необходимость в подобном интервальном расширении может возникнуть, например, при учете ошибок представления на ЭВМ констант, входящих в функцию $f(x)$. В дальнейшем мы будем считать, что для элементов G такой способ определения интервального расширения уже задан, т. е. $\mathrm{Di}f$ определено однозначно, либо на $\mathrm{Di}f$ будем накладывать определенные условия.

Заметим, что если f, $\varphi\in G$, то из $f=\varphi$ не следует $\mathrm{Di}\,f=\mathrm{Di}\,\varphi$. Очевидно, в подтверждение этого утверждения достаточно указать хотя бы один пример.

Пусть $M=D=R$, $f(x)=(\sqrt{x})^3-1$, $\varphi(x)=(x/\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$, $X_0=[1, 4]$. Для соответствующих естественных интервальных расширений $F(X)=(\sqrt{X})^3-1$ и $\Phi(X)=(X/\sqrt{X}-1)(X+\sqrt{X}+1)$ имеем $F(X_0)=[0, 7]$, $\Phi(X_0)=[-7/2, 21]$.

Теперь выясним, как соотносятся значения в точках интервальных расширений, объединенных расширений и исходного отображения F.

Рассмотрим сужение функции $F(X; B)$ по X. Вообще говоря, из класса эквивалентности $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X; B)$ всегда можно выделить отображения, интервальные расширения которых включают $F(X; B)$. Для этого к $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X; B)$ достаточно прибавить некоторое отображение $\psi(x)$, для которого $\bigcup\limits_{x\in X} \psi(x) = 0$, но $\underset{x\to X}{\mathrm{Di}}\, \psi(x) \neq 0$. Например, $\psi(x) = x - x$. С другой стороны $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X; B)$ может быть таково, что из соответствующего класса эквивалентности можно выделить отображения, интервальные расширения которых могут как включать, так и включаться в $F(X; B)$.

Действительно, пусть, например, $M = D = R$, $F(X) = X^2 - 5X$. Тогда $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X) = x^2 - 5x$. Рассмотрим два элемента из класса эквивалентности $f(x) = x^2 - 5x$, а именно $f_1(x) = x(x-5)$ и $f_2(x) = x^2 - 6x + x$. Для соответствующих естественных интервальных расширений в точке $X_0 = [2, 4]$ имеем $F_1(X_0) = [-12, -2]$, $F_2(X_0) = [-18, 8]$, в то время как $F(X_0) = [-16, 6]$, т. е. $F_1(X_0) \subset F(X_0) \subset F_2(X_0)$. Кроме того, из определения интервального и объединенного расширений следует справедливость включения

$$\underset{x\to X}{\mathrm{Di}}\, \mathcal{F}(x; B) \supseteq \bigcup_{x\in X} \mathcal{F}(x; B). \qquad (10)$$

Применение интервальных методов предполагает переход от элементов G к элементам K. Такой переход, как правило, осуществляется построением интервальных расширений, на которые накладывается условие *наибольшей суженности*. (В теореме 3 дается достаточное условие наибольшей суженности для случая рациональных функций.) Очевидно, такому условию удовлетворяло бы объединенное расширение $f \in G$. Однако построение объединенного расширения предполагает вычисление $f(x)$ бесконечное число раз. В связи с этим отметим, что преимущество интервальных методов именно в том и заключается, что бесконечные вычисления в G указанные методы позволяют заменить конечными вычислениями в K, давая в результате интервалы, гарантированно содержащие точные искомые значения. Как мы убедились, не все элементы класса эквивалентности данного f равноценны в смысле наибольшей суженности соответствующих интервальных расширений. Таким образом, из класса эквивалентности f необходимо выделить такой элемент $\tilde{f}$, чтобы $\mathrm{Di}\,\tilde{f}$ было бы как можно уже. Из всего сказанного можно заключить, что $\tilde{f}$ должно удовлетворять следующим требованиям:

1) $\tilde{f}$ не должно содержать двух элементов Π_α, $\Pi_\beta \in P$ таких, что $\Pi_\alpha \Pi_\beta = E$;

2) $\tilde{f}$ с учетом субдистрибутивности должно быть приведено к виду, «удобному» для логарифмирования.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Изучение множества интервальных чисел как алгебраической системы в зависимости от определенных на нем операций и отношений помогает обнаруживать связи между различными, на первый взгляд, понятиями и систематизировать результаты. Особый интерес представляют задача сравнения интервалов, введенных над полуупорядоченным и векторным пространствами, а также анализ свойств интервальных операций.

Как уже отмечалось, если множество M с отношением упорядоченности является структурой, то интервальные арифметические операции можно выразить через операции над граничными значениями исходных интервалов. В дальнейшем мы будем использовать обе возможности представления интервальных операций.

Рассмотрим первоначально основные сведения о системах интервальных чисел с одной арифметической операцией.

Аддитивная система $\langle I(R), +\rangle$ образует коммутативную полугруппу, для которой справедливо правило сокращения $A + C = B + C \Rightarrow A = B$ $\forall A,\ B \in I(M)$. Ее можно представить в виде прямого произведения

$$\langle I(R), +\rangle \simeq \langle R, +\rangle \otimes \langle R^+ \cup \{0\}, +\rangle,$$

что соответствует записи интервала как пары $(\varphi(A), \lambda(A))$, где R^+ — множество положительных действительных чисел, $\varphi(A)$ — средняя точка интервала A, $\lambda(A)$ — длина интервала A. Легко видеть, что мультипликативная система $\langle I'(R) = I(R)\backslash\{0\}, \cdot\rangle$ также является коммутативной полугруппой по операции умножения, которую удобно представить в виде $I'(R) = Y \cap Z$, где $Y = \{A | 0 \equiv A\}$, $Z = \{A | 0 \in A \neq \varnothing\}$. Система $\langle Y, \cdot\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle Z, \cdot\rangle$ — полугруппа, причем $Z = \cup G_i$, $i \in [-1, 0]$, $G_i = \{r[i, 1] | r \in R, r \neq 0\}$. Рассмотрим отображения $\sigma : I'(R) \to \{-1, 0, 1\}$, $\psi : I'(R) \to R^+$, $\chi : I'(R) \to [-1, 1]$, определяемые следующим образом:

$$\sigma[a, b] = \operatorname{sign}(a+b),\ \psi\ [a, b) = \max(|a|, |b|),$$

$$\chi\,[a, b] = \begin{cases} a/b, & |a| \leqslant |b|, \\ b/a, & |b| \leqslant |a|. \end{cases}$$

Тогда каждый интервал $A \neq 0$ однозначно представим как $(\sigma A, \psi A, \chi A)$, при этом $A = (\sigma' A)(\psi A)[\chi A, 1]$, где $\sigma' A = 1$ для $\sigma A \geqslant 0$ и $\sigma' A = -1$ для $\sigma A < 0$. Например, интервалу $[-1, 1]$ соответствует тройка $(0, 1, -1)$.

Множество интервальных чисел с двумя арифметическими операциями уже не удается представить как некоторую хорошо изученную алгебраическую систему из-за отсутствия закона дистрибутивности и взаимной необратимости операций сложения и вычитания, умножения и деления. При исследовании интервального исчисления широко используется понятие квазилинейного пространства [22].

Коммутативная полугруппа $\langle Q, +\rangle$ с нейтральным элементом θ называется *квазилинейным пространством* над полем R, если введено скалярное произведение $R \times Q \to Q$ и справедливы следующие соотношения $\forall A, B, C \in Q\alpha, \beta \in R$:

$(Q1)$ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,

$(Q2)$ $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, если $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$,

$(Q3)$ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

$(Q4)$ $1 \cdot A = A$,

$(Q5)$ $0 \cdot A = \theta$,

$(Q6)$ $A + B = A + C \Rightarrow B = C$.

Легко видеть, что множество интервальных чисел $\langle I(R), +, R\rangle$ с операциями сложения и умножения на скалярные величины является квазилинейным пространством.

Назовем отображение π: $Q_1 \to Q_2$, где Q_1, Q_2 — квазилинейные пространства, *ограниченным линейным*, если $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$ и $\pi(\alpha x) = \alpha\pi(x)$ для $\alpha \geqslant 0$. Взаимно-однозначное отображение π назовем *изоморфизмом*. Под базисом B квазилинейного пространства Q будем понимать минимальную производящую систему элементов из Q, т. е. систему, удовлетворяющую условиям:

1) каждый элемент $X \in Q$ представим в виде $X = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i B_i + \beta_i B_i)$, $B_i \in B$, $\alpha_i, \beta_i \in R$;

2) ни один элемент B_i из B не выражается таким образом через $B\backslash\{B_i\}$ [23].

Множество всех ограниченных линейных функционалов, определенных на Q, образует линейное пространство Q^+. Будем полагать $\dim Q = \dim Q^+$. Тогда для любого квазилинейного пространства Q, в котором справедливо правило сокращения, $\dim Q = \dim L$, где L — наименьшее линейное пространство, являющееся образом Q при ограниченном линейном отображении.

Назовем *множеством дистрибутивных элементов* Q_D совокупность $\{x \in Q | (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,\ \alpha, \beta \in R\}$, *множеством симметричных элементов* Q_s — совокупность $\{x \in Q | -x = x\}$.

Сформулируем факты, которые могут быть положены в основу анализа квазилинейных и интервальных пространств.

Теорема 1 [24]. Пусть Q — квазилинейное пространство, причем $\dim Q = \dim Q_D = n < \infty$, тогда $Q = Q_D$.

Доказательство. Одним из основных положений, используемых в теории квазилинейных пространств, является существование линейного пространства, в которое можно изометрически отобразить исходное квазилинейное пространство [25, 26], причем выбор линейного пространства делает его наименьшим таким пространством. Итак, Q может быть погружено в пространство R^n, следовательно, это справедливо для Q_D. Здесь Q_D является линейным пространством, поэтому Q_D будет изоморфно R^n. Получаем $Q \leqslant Q_D$, откуда $Q = Q_D$.

Теорема 2. а) пусть $x \in Q_s$ и для него существует обратный по сложению элемент $x^{-1} \in Q$, тогда

$x^{-1} \in Q_s$; б) если для $x \in Q$ выполняется $-x = \alpha x$, $\alpha \geqslant 0$, то $x \in Q_s$.

Доказательство. Имеем $x + x^{-1} = \theta = (-1) \times (x + x^{-1}) = -x - x^{-1} = x - x^{-1}$. Используя соотношение ($Q6$), получаем $-x^{-1} = x^{-1}$, т. е. $x^{-1} \in Q_s$. Далее, из $-x = \alpha x$ вытекает, что $x - x = (\alpha + 1)x \in Q_s$. Здесь величина $(\alpha + 1) > 0$, поэтому из $(\alpha + 1)x = -(\alpha + 1)x$ имеем $x = -x$, т. е. $x \in Q_s$.

Теорема 3. Из равенства $\dim Q_s = \dim Q = 2$ следует $Q = Q_s$.

Доказательство. Пусть π: $Q \to R^2$ — ограниченное погружение, сохраняющее результаты введенных в Q операций. Выберем элементы $y_1, y_2 \in Q_s$ такие, что $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ ($\bar{y} = \pi(y)$) образуют базис в R^2.

Предположим, что существует элемент $x \in Q$ и $x \notin Q_s$. Тогда $\bar{x}$ и $\bar{y}_1$ независимы в R^2, и можно записать $-y_2 = \alpha x + \beta y_1$. Покажем, что в этой линейной комбинации $\alpha > 0$. Случай $\alpha = 0$ невозможен, так как $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ независимы в R^2.

Если $\alpha < 0$ и $\beta \leqslant 0$, то $\bar{y}_2 = -\alpha\bar{x} - \beta\bar{y}_1$, а также $y_2 = -\alpha x + \beta y_1$. Умножая последнее соотношение на -1 и учитывая, что $y \in Q_s$, получим $y_2 = \alpha x + \beta y_1$ и $\alpha x = -\alpha x$, что противоречит условию $x \notin Q_s$.

Если $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, то имеем $-\alpha\bar{x} = \beta\bar{y}_1 + \bar{y}_2$, а также $-\alpha x = \beta y_1 + y_2 \in Q_s$, что противоречит предположению $x \notin Q_s$.

Итак, мы показали, что $\alpha > 0$. Если теперь $\beta < 0$, то $-\beta\bar{y}_1 = \alpha\bar{x} + \bar{y}_2$ и $\beta y_1 = -\beta y_1 = \alpha x + y_2$. Умножая его на -1, имеем $\beta y_1 = -\alpha x + y_2$. Используя правило сокращения ($Q6$), видно, что $x \in Q_s$ вопреки предположению. Тем самым $\beta > 0$.

Для обратного к y_2 элемента по сложению y_2^{-1} справедливо равенство $y_2^{-1} = \alpha_x + \beta_y$ и, следовательно, $y^{-1}_2 \in Q$. Аналогично $y_1^{-1} \in Q$. Поскольку $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ образуют базис в R^2, то $\bar{x} = l_1\bar{y}_1 + l_2\bar{y}_2$. Кроме того, было показано, что $\bar{y}_1^{-1} = \alpha_1 x + \beta_1 y_2$, $y_2^{-1} = \alpha_2 \bar{x} + \beta_2\bar{y}_1$, где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ положительны. Совокупность равенств $\bar{x} = l_1\bar{y}_1 + l_2\bar{y}_2$, $\alpha_2\bar{x} = \bar{y}_2^{-1} - \beta_2\bar{y}_1 = y_2^{-1} + \beta_2 y_1$, $\alpha_1\bar{x} = \bar{y}_1^{-1} - \beta_1\bar{y}_2 = \bar{y}_1^{-1} + \beta_1\bar{y}_2$ позволяет записать $(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)x = y_2^{-1} + y_1^{-1} + (l_1 + \beta_2)y_1 + (l_2 + \beta_1)y_2$, причем все коэффициенты здесь положительны. Отсюда в силу существования отображения, осуществляющего погружение, получим $x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \delta_1 y_1^{-1} + \delta_2 y_2^{-1}$, где $\eta_1, \eta_2, \delta_1, \delta_2 \geqslant 0$. В силу теоремы 2 имеем $y_1^{-1}, y_2^{-1} \in Q_s$ и $x \in Q_s$. Из полученного противоречия следует, что $Q = Q_s$. Теорема 3 доказана.

Будем говорить, что квазилинейное пространство Q имеет групповую структуру, если оно образует группу по сложению.

Теорема 4. Пусть $\dim Q = 2$, $\dim Q_D = 1$, $x \in Q_D$, $x \neq \theta$, $y \in Q_s$, $y \neq \theta$. Если Q_s не имеет групповой структуры, то x, y образуют базис в Q.

Доказательство. Так как $x \in Q_D$, $y \in Q_s$, из $\bar{z} + (-\alpha)\bar{x} = \beta\bar{y}$ в R^2 следует $z = (-\alpha)x = \beta y$, где $\beta \geqslant 0$. Если $\beta < 0$, то $-\beta y^{-1} = z - \alpha x \in Q$, следовательно, $y^{-1} \in Q_s$, что противоречит отсутствию групповой структуры в Q_s. Из $z - \alpha x = \beta y$, $\beta \geqslant 0$, следует $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$. Это справедливо для всех $z \in Q$, x, y независимы в Q, следовательно, они образуют базис.

Теорема 5. Для любого $x \in Q$ представление $z = \alpha x + \beta y$, где $\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$, $x \in Q_D$, $y \in Q_s$, единственно.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 x + \beta_1 y = \alpha_2 x + \beta_2 y$, где $\beta_1 \geqslant \beta_2$. Имеем $(\alpha_1 - \alpha_2)x = (\beta_2 - \beta_1)y \in Q_s$, отсюда $\alpha_1 = \alpha_2$. Из $(\beta_2 - \beta_1)y = \theta$ следует $\beta_1 = \beta_2$. Тем самым единственность доказана.

С точностью до изоморфизма однозначную характеристику квазилинейным пространствам размерности два дает следующая теорема.

Теорема 6. Квазилинейное пространство Q, $\dim Q = 2$, изоморфно $\langle I(R), +, R\rangle$, если $\dim Q_D = 1$.

Доказательство. Как было показано выше, для любого $z \in Q$ справедливо однозначное разложение $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$, $x \in Q_D$, $y \in Q_s$. Определим следующее отображение:

$$\Phi : Q \to I(R),$$

$$z = \alpha x + \beta y \xrightarrow{\Phi} \alpha \cdot 1 + \beta[-1, 1].$$

Очевидно, что это отображение взаимно-однозначно, а система 1, $[-1, 1]$ независима в $I(R)$. Кроме того,

$$\Phi(z_1 + z_2) = \Phi((\alpha_1 x + \beta_1 y) + (\alpha_2 x + \beta_2 y)) =$$
$$= \Phi((\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 1 + (\beta_1 + \beta_2) \times$$

$$\times[-1,\ 1]=\alpha_1\cdot 1+\beta_1\cdot[-1,\ 1]+\alpha_2\cdot 1+\beta_2\cdot[-1,\ 1]=$$
$$=\Phi(z_1)+\Phi(z_2),$$
$$\Phi(cz)=\Phi(c\alpha x+|c|\beta y)=(c\alpha)\cdot 1+|c|\beta\cdot[-1,\ 1]=$$
$$=c(\alpha\cdot 1+\beta\cdot[-1,\ 1])=c\Phi(z).$$

Итак, отображение Φ осуществляет требуемый изоморфизм.

Анализ различных значений размерности Q_D, Q_s позволяет получить следующие результаты [24].

1. Пусть $\dim Q=2$, $\dim Q_D=0$, $\dim Q_s=1$ и задан одноэлементный базис Q, тогда Q изоморфно подпространству $I_1=\{A\in I(R)\,|\,A=\alpha[0,\ 1]+\beta[-1,\ 0],\ \alpha,\ \beta\geqslant 0\}$ пространства $I(R)$.

2. Пусть $\dim Q=2$, $\dim Q_D=0$, $\dim Q_s=1$ и в Q не существует базиса, тогда Q изоморфно либо подпространству $I_2=\{A\in I(R)\,|\,A=\alpha\cdot 1+\beta[-1,\ 1],\ \alpha\in R,\ \beta>0\}\cup\{0\}$, либо подпространству $I_3=\{A\in I(R)\,|\,A=\alpha[0,\ 1]+\beta[-1,\ 0],\ \alpha,\ \beta>0\}\cup\{0\}$ пространства $I(R)$.

3. Пусть $\dim Q=2$, $\dim Q_D=2$, тогда Q изоморфно R^2.

Понятие интервальных величин можно распространить на случай произвольных нормированных пространств.

Пусть $\langle E,\ \|\cdot\|\rangle$ — нормированное линейное пространство. Будем называть интервалом множество $[y,\ \varepsilon]=\{x\in E\,|\,\|x-y\|\leqslant\varepsilon\}$, $y\in E$, $\varepsilon>0$, и обозначать через $I(E,\ \|\cdot\|)$ совокупность всех таких интервалов.

Сложение и умножение на числа из R определены так:

$$[x,\ \varepsilon]+[y,\ \delta]=[x+y,\ \varepsilon+\delta],$$
$$\alpha[x,\ \varepsilon]=[\alpha x,\ |\alpha|\varepsilon].$$

Соотношение между интервалами, рассматриваемыми над нормированными и упорядоченными пространствами [23, 27], представляет интерес, так как в большинстве случаев интервальное исчисление строится над пространствами, где определены и норма, и упорядоченность.

Лемма 1. Пусть $\langle E,\ \|\cdot\|\rangle$ — действительное нормированное пространство, $(E,\ \leqslant)$ — полуупорядоченное линейное пространство, причем упорядоченность $\leqslant$ не тождественна отношению равенства $=$. Тогда интервальное пространство $I(E,\ \|\cdot\|)$ может быть погружено в интервальное пространство $I(E,\ \leqslant)$.

Доказательство. По предположению, существует элемент $x_0\in E$ такой, что $0\leqslant x_0$ и $x_0\neq 0$. Определим отображение φ: $I(E,\ \|\cdot\|)\to I(E,\ \leqslant)$ следующим образом: $\varphi([a,\ \varepsilon])=[a-\varepsilon x_0,\ a+\varepsilon x_0]$. Очевидно, что φ задает требуемое погружение. При этом получаем возможность вводить для заданного нормированного пространства отношение полуупорядоченности. Пространство $I(E,\ \|\cdot\|)$ может быть рассмотрено как подпространство $I(E,\ \leqslant)$.

Возможность изоморфизма этих интервальных пространств дает следующая теорема.

Теорема 7. Если $\langle E,\ \leqslant,\ \|\cdot\|\rangle$ — n-мерное упорядоченное пространство, в котором введена норма, то изоморфное отображение $I(E,\ \leqslant)\leftrightarrow I(E,\ \|\cdot\|)$ устанавливается только тогда, когда $\dim I(E,\ \leqslant)=n+1$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие определения. Подмножество M квазилинейного пространства Q над R, для которого $a+b$, $\alpha a\in M$, $a,\ b\in M$, $\alpha\geqslant 0$, называется *выпуклым конусом* в Q. Множество элементов $\{x\in E\,|\,x\geqslant 0\}$ образует выпуклый конус в $(E,\ \leqslant)$, называемый *положительным конусом*.

Лемма 2. Возможно установить изоморфизм $I(E,\ \|\cdot\|)\leftrightarrow(R^+\cup\{0\})\times E$, при этом $\dim I(E,\ \|\cdot\|)=1+\dim E$.

Доказательство. Требуемый изоморфизм устанавливает отображение φ: $[a,\ \varepsilon]\leftrightarrow(\varepsilon,\ a)$.

Лемма 3. Пусть $(E,\ \leqslant)$ — n-мерное полуупорядоченное линейное пространство над R, положительный конус в E содержит m линейно-независимых элементов; тогда $\dim I(E,\ \leqslant)=n+m$.

Доказательство. Каждый элемент из $I(E,\ \leqslant)$ допускает задание $[a,\ b]=[a,\ a]+[0,\ b-a]$, что дает возможность установить изоморфизм $I(E,\ \leqslant)\leftrightarrow E\times P$, где P обозначает положительный конус в E.

Переходя к доказательству теоремы, отметим, что разложение $[a,\ b]=[a,\ a]+\lambda[0,\ c]$, $c\in E$, определяет изоморфное отображение ψ: $I(E, \leqslant) \leftrightarrow I(E, \|\cdot\|)$, где $\psi([a, b]) = [a, \lambda]$ с учетом лемм 2 и 3. Теорема доказана.

Для множества интервальных чисел с операциями сложения и умножения можно сформулировать обобщение понятия алгебры.

Под *нормой* в квазилинейном пространстве Q над R понимается действительно-значная функция $\|\cdot\|$, определенная на Q, с обычными свойствами нормы:

$$\|A\| > 0, \quad A \neq \theta,$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \qquad (A,\ B \in Q,\ \alpha \in R).$$

Нормированное квазилинейное пространство Q над R, в котором определено коммутативное умножение $Q \times Q \to Q$, назовем *коммутативной квазиалгеброй*, если для всех A, B, $C \in Q$, α, $\beta \in R$ выполняются свойства

$(QA1)$ $(AB)C = A(BC)$, если $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|$, $\|BC\| = \|B\| \cdot \|C\|$,

$(QA2)$ $(A + B)C = AC + BC$, если $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$,

$(QA3)$ $(\alpha\beta)AB = (\alpha A)(\beta B)$,

$(QA4)$ $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Если E — нормированная коммутативная алгебра над R с нормой $\|\cdot\|$, $Q = I(E, \|\cdot\|)$ — интервальное пространство, причем в нем индуцирована норма $\|[A, \varepsilon]\| = \|A\| + \varepsilon$, $A \in E$, $\varepsilon \geqslant a$, и умножение $Q \times Q \to Q$ определено следующим образом:

$$[A, \varepsilon] + [B, \delta] = [AB,\ \varepsilon\delta + \|A\|\delta + \|B\|\varepsilon],$$

то Q является коммутативной квазиалгеброй [23].

Для элементов интервального пространства можно ввести отношения упорядоченности, т. е. рефлексивные, антисимметричные, транзитивные бинарные отношения.

Пусть M — упорядоченное линейное пространство, будем обозначать $P(M)$ — множество всех его подмножеств, $I(M)$ — множество всех его интервалов. Определим в $I(M)$ и $P(M)$ отношение $<$:

$$A < B \Leftrightarrow (\forall a \in A) \bigwedge (\forall b \in B) | a < b;$$

Справедливы включения $\langle M, <\rangle \subseteq \langle I(M), <\rangle \subseteq \langle P(M), <\rangle$, но ни $\langle I(M), <\rangle$, ни $\langle P(M), <\rangle$ не являются структурой. Введем отношение $\leqslant$ для интервалов A, $B \in I(M)$, $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow (\forall a \in A \exists b \in B | a \leqslant b) \bigwedge (\forall b' \in B \exists a' \in A | a' \leqslant b').$$

Так же справедливо соотношение $A \leqslant B \Leftrightarrow \underline{a} \leqslant \underline{b} \bigwedge \bar{a} \leqslant \bar{b}$.

Теорема 8. Если $\langle M, \leqslant\rangle$ — структура, то структурой будет $\langle I(M), \leqslant\rangle$, причем

$$\sup(A, B) = [\sup(\underline{a}, \underline{b}),\ \sup(\bar{a}, \bar{b})],$$

$$\inf(A, B) = [\inf(\underline{a}, \underline{b}),\ \inf(\bar{a}, \bar{b})].$$

Рассмотрим отношение порядка $\subseteq$: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A | a \in B$, причем $A \subseteq B \Leftrightarrow \underline{b} \leqslant \underline{a} \wedge \bar{a} \leqslant \bar{b}$.

Теорема 9. Если $\langle M, \subseteq\rangle$ — структура, то $\langle I(M) \cup \{\varnothing\}, \subseteq\rangle$ также образует структуру, причем

$$\sup(A, B) = [\inf(\underline{a}, \underline{b}),\ \sup(\bar{a}, \bar{b})],$$

$$\inf(A, B) = \begin{cases} [\sup(\underline{a}, \underline{b}), \inf(\bar{a}, \bar{b})], & \text{если } \inf(\bar{a}, \bar{b}) \geqslant \sup(\underline{a}, \underline{b}), \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пользуясь свойствами интервальной структуры, можно сформулировать понятие сходимости последовательности интервалов [28].

Пусть $\langle M, \leqslant\rangle$ — условно полная структура, каждое ограниченное сверху (снизу) подмножество которой имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Тогда

$$x_\nu \nearrow x \Leftrightarrow x_\nu \leqslant x_{\nu+1} \bigwedge x = \sup_\nu x_\nu, \quad \nu \in N,$$

$$x_\nu \searrow x \Leftrightarrow x_\nu \geqslant x_{\nu+1} \bigwedge x = \inf_\nu x_\nu, \quad \nu \in N,$$

$$x_\nu \xrightarrow{(0)} x \Leftrightarrow \exists \{y_\nu\}, \{z_\nu\} | y_\nu \leqslant x_\nu \leqslant z_\nu \bigwedge x = \sup_\nu y_\nu = \inf_\nu z_\nu, \quad \nu \in N.$$

Поскольку $\langle I(M), \leqslant\rangle$, $\langle I(M) \cup \varnothing, \subseteq\rangle$ — условно полные структуры, определение сходимости переносится на последовательности интервалов:

$$X_\nu \xrightarrow{(0)} X \Leftrightarrow \underline{x}_\nu \xrightarrow{(0)} \underline{x} \wedge \overline{x}_\nu \xrightarrow{(0)} \overline{x},$$

где $X_\nu = [\underline{x}_\nu, \overline{x}_\nu]$, $X = [\underline{x}, \overline{x}]$. Для всех рассматривавшихся выше структур для сходящихся последовательностей выполняются соотношения

$$x_\nu = x, \quad \nu \in N \Rightarrow x_\nu \xrightarrow{(0)} x,$$

$$x_\nu \xrightarrow{(0)} x \wedge \{\nu_k\} \in N \Rightarrow x_{\nu_k} \xrightarrow{(0)} x,$$

$$x_\nu \leqslant a, \ \nu \in N \wedge x_\nu \xrightarrow{(0)} x \Rightarrow x \leqslant a.$$

Глава II

ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ

1. Одним из основных вопросов дифференциального исчисления является вопрос об аппроксимации (в окрестности некоторой точки) заданных отображений линейными отображениями. При этом аппроксимирующее линейное отображение должно представлять хорошее приближение в достаточно точном смысле.

В данном параграфе мы дадим определения и исследуем свойства производных интервальных отображений. Для этого нам потребуются некоторые утверждения об интервальных пространствах.

Пусть E — нормированное линейное пространство в котором введено отношение упорядоченности. Для дальнейшего нашего рассмотрения достаточно ограничиться случаем $E = R$. Через $I(R)$, как обычно, обозначим множество интервалов $A = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$, либо $A = \{x \in R \mid \|x - d\| \leqslant \varepsilon\} = [d, \varepsilon]$. Введем в $I(R)$ норму $\|[d, \varepsilon]\| = \|d\| + \varepsilon$ и метрику $\rho([d, \varepsilon], [c, \delta]) = \rho(c, d) + |\varepsilon - \delta|$, где $\rho(c, d)$ — метрика в R. Возможны и другие определения нормы и метрики, согласующиеся с отношением упорядоченности $\leqslant$:

$$\|[a, b]\| = \max(|a|, |b|),$$

$$\rho([a, b], [c, d]) = \max(|a - c|, |b - d|).$$

Будем рассматривать интервально-значные функции с действительным аргументом F: $R \to I(R)$. Один из первых способов определения производной интервальных функций связан с методами погружения [29].

Если D — рефлексивное нормированное пространство, то существует действительное нормированное линейное пространство $\mathscr{B}(D)$ и изометрическое отображение π: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'(D)$, где $\mathscr{B}$ — множество всех замкнутых выпуклых подмножеств D, метризованное с помощью хаусдорфовой метрики. Для интервальных пространств над R показано, что такое погружение осуществляет функция π: $[a, b] \to (a, b) \in R^2$ [12]. При этом любую интервальную функцию F: $R \to I(R)$ можно сопоставить с отображением $\hat{F}$: $R \to R^2$, определенным следующим образом: $\hat{F} = \pi F$.

Интервальная функция F: $R \to I(R)$ называется *π-дифференцируемой по Фреше* в точке x, если функция $\hat{F} = \pi F$ дифференцируема по Фреше в этой точке, т. е. существуют линейное отображение $dF_x(h)$: $R \to R^2$ и отображение $r: R \to R^2$, удовлетворяющие свойствам $r(0) = (0, 0)$, $\lim\limits_{h \to 0}(r(h)/h) = (0, 0)$, причем для всех h из некоторой окрестности нуля выполняется равенство

$$\hat{F}(x + h) - \hat{F}(x) = dF_x(h) + r(h).$$

Тогда производная Фреше функции F равняется $\pi^{-1}F'(x)$, а F' определяется, как обычно, из соотношения $dF_x(h) = F'(x)h$ для всех x из области определения функции.

Отсюда видно ограничение, возникающее при использовании введенного определения. Рассмотрим функцию $G(x) = [0, 1]x$, для нее

$$\hat{G}'(x) = \begin{cases} (0, 1), & x > 0, \\ (1, 0), & x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что $G(x)$ будет π-дифференцируемой по Фреше только при $x > 0$, $G'(x) = [0, 1]$. Имеет место

Теорема 1. Если функция $F: R \to I(R)$ π-Фреше-дифференцируема в точке x, то $dF_x(h) \in I(R) = \{(a, b) \in R^2 | a \leqslant b\}$ тогда и только тогда, когда λF не убывает в направлении h (это означает, что для t из достаточно малой окрестности нуля функция $\lambda F(x + th)$ не убывает по t, λ — длина интервала).

Доказательство теоремы следует из хорошо известных свойств производной действительной функции, так как для фиксированного h Фреше-дифференцируемость совпадает с дифференцируемостью по действительному параметру t. Кроме того, предполагается, что $F(x) = [f(x), g(x)]$ в области определения.

2. Для интервального пространства $I(R)$ возможны различные способы записи интервалов, о чем уже упоминалось выше. Например, интервал $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ можно представить так: $X = 1 \cdot \varphi(X) + [-1, 1]\lambda(X)/2$. Здесь $\varphi(X) = (\underline{x} + \bar{x})/2$. Поскольку при этом изменится способ погружения $I(R)$ в R^2, необходимо установить, меняется ли введенное определение дифференцируемости. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема [25].

Теорема 2. Пусть γ — гомоморфное ограниченное вложение $\langle I(R), +, \cdot\rho\rangle$ в $\langle R^2, +, \cdot\rho\rangle$, функция $F: R \to (R^2)$ будет π-Фреше-дифференцируемой в x тогда и только тогда, когда существует отображение $F^*: R \to R^2$, $F^* = \gamma F$, дифференцируемое в x. При этом $d_x F(h) = (\pi\gamma^{-1}) d_x F^*(h)$, где $(\pi\gamma^{-1})$ — автоморфизм, индуцированный в R^2 отображением $\pi\gamma^{-1}$.

Доказательство. Отметим, что для интервальных пространств под вложением понимается линейное отображение. Имеем $\pi F = \pi\gamma^{-1}(\gamma F) = \pi\gamma^{-1} F^*$. Без ограничения общности мы можем распространить $\pi\gamma^{-1}$ до линейного отображения, заданного на всем R^2. Для этого используем тот факт, что если $\bar{X} \notin \gamma(I(R))$, то $-\bar{X} \in \gamma(I(R))$, где $\bar{X} = (a, b)$, $-\bar{X} = (-a, -b)$.

Определим

$$(\pi\gamma^{-1})(\bar{X}) = \begin{cases} \pi\gamma^{-1}(\bar{X}), & \text{если } \bar{X} \in \gamma(I(R)), \\ -\pi\gamma^{-1}(-\bar{X}), & \text{если } \bar{X} \notin \gamma(I(R)). \end{cases}$$

Это отображение линейно, так как для отрицательных α $(\pi\gamma^{-1})(\alpha\bar{X}) = -\pi\gamma^{-1}(-\alpha\bar{X}) = \alpha\pi\gamma^{-1}(\bar{X}) = \alpha(\pi\gamma^{-1})(\bar{X})$, если $\bar{X} \in \gamma(I(R))$, $(\pi\gamma^{-1})(\alpha\bar{X}) = \pi\gamma^{-1}(\alpha\bar{X}) = -\alpha\pi\gamma^{-1}(-\bar{X}) = \alpha(\pi\gamma^{-1})(\bar{X})$, если $\bar{X} \notin \gamma(I(R))$. Поскольку любое линейное отображение дифференцируемо по Фреше, то $d_x F(h) = (\pi\gamma^{-1}) dF^*_x(h)$. Теорема доказана.

Предположив представимость интервально-значных функций граничными вещественными, получаем утверждения о свойствах производных.

Теорема 3. Пусть $F_1, F_2: R \to I(R)$ π-Фреше-дифференцируемы в точке x_0, $F_1(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, $F_2(x) = [f_3(x), f_4(x)]$. Предположим, что существуют пары (i, j) и (m, n), $i, m = 1 \vee 2$, $j, n = 3, 4$, такие, что $f_i(x) \cdot f_j(x) < f_k(x) f_l(x) < f_m(x) f_n(x)$, $(k, l) \neq (i, j)$, $(k, l) \neq (m, n)$. Тогда произведение $F_1(x) \cdot F_2(x)$ будет π-Фреше-дифференцируемо в точке x_0, причем

$$d_{x_0}(F_1 F_2)(h) = \big(f_i(x)\, d_{x_0} f_j(h) + f_j(x)\, d_{x_0} f_i(h),\ f_m(x) \times \\ \times d_{x_0} f_n(h) + f_n(x)\, d_{x_0} f_m(h)\big).$$

Доказательство. Поскольку функции F_1, F_2 π-Фреше-дифференцируемы, они непрерывны. Следовательно, в некоторой окрестности точки x_0 функция $F_1 F_2$ может быть представлена в виде $F_1(x) F_2(x) = [f_i(x) f_j(x), f_m(x) f_n(x)]$ для любого x из этой окрестности. Кроме того,

$$d_{x_0}(f_i(x) f_j(x)) = f_i(x)\, d_{x_0} f_j(h) + f_j(x)\, d_{x_0} f_i(h),$$

$$d x_0 (f_m(x) f_n(x)) = f_m(x)\, d_{x_0} f_n(h) + f_n(x)\, d_{x_0} f_m(h).$$

Теорема 4. Пусть $F: R \to I(R)$, $F = [f(x), g(x)]$ π-Фреше-дифференцируема в точке x_0 и существует окрестность V_{x_0} точки x_0 такая, что для всех $y \in V_{x_0}$ выполняется включение $F(x_0) \subset F(y)$, либо $F(y) \subset F(x_0)$, тогда $d_{x_0} F(h) = (0, 0)$.

Доказательство. Пользуясь определением π-Фреше-дифференцируемости легко видеть, что $d_{x_0}(F(h)) = [f'(x_0), g'(x_0)]$, причем из $F(x) \subset F(y)$, либо $F(y) \subset F(x)$, для всех $y \in V_{x_0}$ получаем $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$.

3. Приведем также определения производной интервально-значных функций, не использующие методов погружения. Будем отождествлять значения интервальных функций с точками пространства R^2.

Пусть $G: M \to I(R)$, $M \subset R$, и является открытым множеством. Назовем функцию G *$\mathcal{F}$-дифференцируемой* в точке $x \in M$, если существуют элемент $(a, b) \in R^2$ и отображение $r: R \to R^2$, $r(0) = (0, 0)$, $\lim_{h\to 0}(r(h)/h) = (0, 0)$ такие, что для всех h из достаточно малой окрестности нуля выполняется равенство $G(x+h) - G(x) = (a, b)h + r(h)$. Под операцией вычитания здесь понимается вычитание в R^2. Функция $G'(x) = (a, b)$ называется *$\mathcal{F}$-производной* от G в точке x.

Из этого определения видно, что, расширяя класс дифференцируемых функций, мы утрачиваем такое важное свойство производной, как линейность.

4. Следуя идее Мура [19], можно дать определение производной, использующее операцию интегрирования интервально-значных функций. Интегрирование интервальных функций рассмотрено в § 2. Нам потребуются следующие сведения.

Пусть $M \subset R$ — связное множество, $F: M \to I(R)$ определяется через граничные вещественные функции: $F(x) = [f(x), g(x)]$ для $x \in M$. Если F интегрируема, то выполняется соотношение [30]:

$$\int_a^b F(\xi)\,d\xi = \begin{cases} \left[\int_a^b f(\xi)\,d\xi,\ \int_a^b g(\xi)\,d\xi\right], & \text{если } a \leqslant b, \\ \left[-\int_a^b g(\xi)\,d\xi,\ -\int_a^b f(\xi)\,d\xi\right], & \text{если } a \geqslant b. \end{cases}$$

Интервальная функция $F: M \to I(R)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в M, если задана непрерывная функция $G: M \to I(R)$ и покрытие множества M семейством $(\mathcal{I}_n)_{n\in N}$, где $\mathcal{I}_n \in I(R)$, $n \in N$ — некоторое счетное множество индексов такое, что для любого $n \in N$ существуют $a_n \in R$ и $F_n \in I(R)$, удовлетворяющие равенству

$$F(x) = \int_{a_n}^{x} G(\xi)\,d\xi + F_n \quad \forall x \in \mathcal{I}_n.$$

Если функция G находится единственным образом и не зависит от выбора покрытия и точек a_n, то назовем G производной функции F, $F' = G$.

Приведем примеры, показывающие, что непрерывно дифференцируемые функции в смысле приведенного определения могут не быть непрерывными, а из непрерывной дифференцируемости не следует дифференцируемости граничных функций.

Рассмотрим функцию $F(x) = [0, 1]\operatorname{sign} x$. Очевидна ее дифференцируемость $F'(x) = 0$, однако в нуле она не является непрерывной.

Функция $F(x) = [-1, 1] + [-1, 1]x$ также дифференцируема, $F'(x) = [-1, 1]$, граничные же функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{для } x \leqslant -1, \\ -1 - x & \text{для } x > -1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{для } x \leqslant -1, \\ 1 + x & \text{для } x > -1 \end{cases}$$

не будут дифференцируемы при $x = -1$. Приведем соотношения, связывающие интервальную функцию $F = [f, g]$ с граничными функциями. Пусть F непрерывно дифференцируема в M, производная $G = [u, v]$, $(\mathcal{I}_n)_{n\in N}$ — требуемое разложение M, $(a_n)_{n\in N}$ — семейство точек, $(F_n)_{n\in N}$, где $F_n = [c_n, d_n]$,— множество констант интегрирования.

Справедливы равенства

$$f(x) = c_n + \int_{a_n}^{x} v(\xi)\,d\xi, \quad g(x) = d_n + \int_{a_n}^{x} u(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathcal{I}_n, \quad x \leqslant a_n,$$

$$f(x) = d_n + \int_{a_n}^{x} u(\xi)\,d\xi, \quad g(x) = c_n + \int_{a_n}^{x} v(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathcal{I}_n \quad x \geqslant a_n.$$

При этом

$$\begin{aligned} &u(x) = g'(x),\ v(x) = f'(x) \text{ для } x \in \mathcal{I}_n,\ x < a_n, \\ &u(x) = f'(x),\ v(x) = g'(x) \text{ для } x \in \mathcal{I}_n,\ x > a_n, \end{aligned} \tag{1}$$

т. е. для всех $n \in N$ функции f на множестве $(\mathcal{I}_n \setminus \{a_n\})$

и g на множестве $(\mathscr{I}_n \backslash \{a_n\})$ непрерывно дифференцируемы.

5. Сформулируем утверждения о свойствах производных интервальных функций [30].

Лемма 1. Пусть $F = [f(x),\ g(x)]$ непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве $M \subset R$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на M, за исключением, быть может, счетного множества точек, причем интервальная функция $f' \vee g'$ может быть продолжена до непрерывной на M интервальной функции $f' \vee g'$, и справедливо $F' = f' \vee g'$.

Доказательство. Из (1) следует, что в каждом интервале существует не более трех точек, в которых f и g не являются непрерывно дифференцируемыми. В тех точках x, где f и g дифференцируемы, выполняется $F'(x) = f'(x) \vee g'(x)$. Очевидно, что $f' \vee \vee g'$ может быть продолжена до непрерывной функции F' на M. Лемма доказана.

Лемма 2. (Интервальный аналог теоремы о среднем.) Пусть функция $F = [f,\ g]$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на интервале $X \in I(R)$, $x \in \in X$. Обозначим $F'(X) = \bigcup_{x \in X} F'(x) \in I(R)$, тогда выполняется включение $F(x) \subset F(x_0) + (x - x_0)F'(X)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Обозначим $h = x - x_0$. Запишем следствия теоремы о среднем для вещественных функций:

$$f(x) \in f(x_0) + h[D^R f(\xi),\ D_L f(\xi)],$$

либо $$f(x) \in f(x_0) + h[D^L f(\xi),\ D_R f(\xi)],$$

где $\xi \in x \vee x_0$, D^R, D_R, D^L, D_L обозначают правую (верхнюю и нижнюю), левую (верхнюю и нижнюю) производные соответственно.

Из леммы 1 следует $f(x) \in f(x_0) + hF'(\xi)$, аналогично $g(x) \in g(x_0) + hF'(\eta)$, $\eta \in x \vee x_0$, откуда

$$F(x) = [f(x),\ g(x)] \subset F(x_0) + h(F'(\xi) \vee F'(\eta)) \subset$$
$$\subset F(x_0) + hF'(X).$$

Из $X \in I(R)$ и непрерывности F' видно, что $F'(X) \in \in I(R)$.

6. Мы проанализировали некоторые определения производной интервально-значных функций и их

свойства, быть может, не полностью тождественные аналогичным свойствам для вещественных функций. Общим для всех этих способов является использование метрики пространства $I(R)$ при нахождении пределов сходящихся последовательностей функций.

В последние годы болгарскими математиками [31—33] был развит несколько иной подход к определению сходящихся последовательностей, нахождению их пределов, и на этой основе сформулированы основные понятия дифференциального исчисления для интервальных функций.

Пусть задана последовательность интервалов $\{A_n\}$, $A_n \in I(R)$. Назовем интервал A, который является пересечением всех интервалов, содержащих члены последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа, *s-пределом последовательности* $\{A_n\}_1^\infty$: $: s\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Если $\{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, то $a = s\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ — это минимальный интервал, содержащий все предельные точки последовательности, например $s\lim\limits_{n} (-1)^n = [-1,\ 1]$. Аналогично вводится понятие предела интервальной функции.

Пусть $F: \Lambda \to I(R)$, $\Lambda \subset R$, $x_0 \in \Lambda$, $f \in F$. Назовем интервал A *s-пределом* функции в точке x_0, если A является пересечением всех интервалов, содержащих интервалы вида $s\lim\limits_{n} F(f,\ x_n)$, где $x_n \in \Lambda$, $x_n \to x_0$.

Введем определение предела интервальной функции G, заданной через вещественные граничные функции: $G(x) = [\underline{g}(x),\ \bar{g}(x)]$. Пусть G — интервальная функция, определенная в выколотой окрестности точки $x_0 : \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. Назовем s-пределом функции G при $x \to x_0$ интервал

$$s\lim_{x\to x_0} G(x) = [\underline{\lim_{x\to x_0}}\ \underline{g}(x),\ \overline{\lim_{x\to x_0}}\ \bar{g}(x)].$$

Тогда можно ввести определение производной интервальной функции:

$$G'(x) = s\lim_{h\to 0} ((G(x+h) - G(x))/h).$$

В работах [32, 33] проведено сравнение введенного определения с ранее существующими и дан анализ свойств производной.

§ 2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть f — непрерывная функция, для которой существует интервальное расширение F. Предположим, что F есть интервально-значная функция, определенная для $X \subset A$, где $A = [a, b]$, $a < b$ и сужение F есть непрерывная вещественная функция по A, $F(x) = f(x)$ при $x \in A$ и $f(x) \subset F(X)$ при $X \subset A$. Функция

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad t \in [a, b]$$

имеет непрерывную производную $g'(x) = f(x)$ и по теореме о среднем

$$g(x) = g(a) + f(a + \theta(x-a))(x-a)$$

для некоторого $\theta \in [0, 1]$. Так как $g(a) = 0$, следовательно,

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int f(a + \theta(x-a))(x-a), \quad \theta \in [0, 1].$$

Тогда

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in F(a + [0, 1](x-a))(x-a)$$

и так как $x \in [a, b]$ и $x \geqslant a$, то

$$\int_a^x f(t)\,dt \in F([a, x])(x-a).$$

Отсюда для любого $X = [x_1, x_2] \subset A$, обозначая $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ через $\int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt$ или $\int_X f(t)\,dt$, имеем

$$\int_X f(t)\,dt \in F(X)\,\omega(X). \tag{1}$$

Используя свойство аддитивности интеграла:

$$\int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt + \int_{[x_2,x_3]} f(t)\,dt = \int_{[x_1,x_3]} f(t)\,dt,$$

получим

$$\int_{[x_1,x_3]} f(t)\,dt \in F([x_1, x_2])(x_2 - x_1) + F(x_2, x_3)(x_3 - x_2). \tag{2}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Если F — рациональная интервальная функция, определенная для $X \subset A$, f — ее сужение на A и $X_i^{(n)} = [a + (i-1)(x-a)/n,\ a + i(x-a)/n]$ $(i = 1, \ldots, n)$, то существует положительная постоянная l такая, что для каждого целого $n > 0$

$$\int_{[a,x]} f(t)\,dt \in \sum_{i=1}^{n} F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n) \tag{3}$$

и

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{n} F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n)\right) \leqslant l\,(x-a)^2/n. \tag{4}$$

Доказательство. Включение (3) следует из соотношений (1) и (2).

Далее, существует постоянная $l > 0$ такая, что для всех $X \subset A$, $\omega(F(X)) \leqslant l\omega(X)$, и поэтому

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{n} F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n)\right) \leqslant ((x-a)/n) \sum_{i=1}^{n} l\omega\left(X_i^{(n)}\right). \tag{5}$$

Так как $\omega\left(X_j^{(n)}\right) = (x-a)/n$, из (5) следует (4). Теорема доказана.

Формула (1) дает основание для введения понятия интервального интеграла, т. е. интервально-значного интеграла от интервально-значной функции.

Пусть f — непрерывная интервально-значная функция вещественного переменного (это возможно, например, за счет наличия интервальных коэффициентов). Если F — непрерывное интервальное расширение f такое, что $F(x)=f(x)$, то мы определим интеграл так:

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)\,dt = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n). \qquad (6)$$

Для каждого множества вещественных коэффициентов из данного интервального вектора C, коэффициентов рациональной функции f мы получим непрерывную функцию f_c такую, что $f_c(x)\in f(x)$, и с учетом (3) интеграл $\int\limits_{[a,x]} f_c(t)\,dt$ будет содержаться в правой части равенства (6) и, следовательно,

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)\,dt = \left\{\int f_c(t)\,dt \mid c\in C\right\}. \qquad (7)$$

Если f — непрерывная интервально-значная функция вещественного переменного $x\in[a, b]$, то существует пара непрерывных вещественных функций f_1 и f_2 таких, что $f(x)=[f_1(x), f_2(x)]$, и введенное выше определение интеграла равносильно следующему:

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)\,dt = \left[\int\limits_{[a,x]} f_1(t)\,dt,\ \int\limits_{[a,x]} f_2(t)\,dt\right]. \qquad (8)$$

Преимущество (7) над (8) состоит в том, что обычно интервальное расширение получается не непосредственно, а некоторым расширением вещественных операций до интервальных.

Теорема 2. Если f и g — непрерывные интервально-значные функции вещественного переменного $x\in[a, b]$ и $f(x)\subset g(x)$, то

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx \subset \int\limits_{[a,b]} g(x)\,dx.$$

Действительно, если $f(x)=[f_1(x), f_2(x)]$, $g(x)=[g_1(x), g_2(x)]$ и $f(x)\subset g(x)$, то из (8) следует

$$\int\limits_{[a,b]} g_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_{[a,b]} f_1(x)\,dx \leqslant \int\limits_{[a,b]} f_2(x)\,dx \leqslant \int\limits_{[a,b]} g_2(x)\,dx,$$

что и доказывает справедливость теоремы 2.

§ 3. ПРЕДСТАВИМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГРАНИЧНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Пусть $M=R$. Рассмотрим вопрос о представимости интервально-значной функции двумя граничными вещественными функциями. Наличие такого представления помогает свести изучение интервально-значной функции к изучению вещественных функций. Например, как показано в [29], дифференцируемость граничных функций является необходимым и достаточным условием F-дифференцируемости данной интервально-значной функции.

Задача о представлении интервально-значной функции двумя граничными вещественными функциями состоит в нахождении представления

$$F(X;\ B)=[f_1(t),\ f_2(t)], \qquad (1)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — некоторые вещественные функции, подлежащие определению, причем $t\in Q^{R_k}\subset R_k$, $k\leqslant 2n$, а область Q^{R_k} также подлежит определению.

Например, если на отрезке $0\leqslant x\leqslant 3$ рассмотрим функцию

$$F(x;\ B)=x^2-[2,\ 4]x+[3,\ 5], \qquad (2)$$

то

$$f_1(t)=x^2-4x+3,\quad f_2(x)=x^2-2x+5.$$

Действительно, каждому фиксированному значению $x\in[0,\ 3]$ функция (2) ставит в соответствие некоторый интервал $[a,\ b]$ (так, если $x=1$, то $[a,\ b]=[0,\ 4]$). Тогда, как нетрудно видеть, множество значений функции (2) на плоскости $(x,\ y)$ представляет собой область, ограниченную кривыми $y=x^2-4x+3$, $y=x^2-2x+5$ и отрезками прямых $x=0$, $x=3$.

2. Пусть $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)=([u_1,\ v_1],\ \ldots,\ [u_n,\ v_n])=[u,\ v]$, где $u_i\leqslant x_i\leqslant y_i\leqslant v_i$, $a_j\leqslant b_j\leqslant c_j$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ m)$.

Тогда для функции $F(X;\ B)$ существуют функции $\Omega(x,\ y;\ B)$, $\varphi(x,\ y;\ b)$ и $\psi(z;\ b)$ такие, что

$$F(X;\ B)=\bigcup_{x,y\in X}\Omega(x,\ y;\ B)=\bigcup_{x,y\in X}\bigcup_{b\in B}\varphi(x,\ y;\ b)=$$
$$=\bigcup_{x,y\in X,b\in B}\varphi(x,\ y;\ b)=\bigcup_{x,y\in X,b\in B}\psi(z;\ b),$$

где $z=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Далее

$$\bigcup_{x,y\in X, b\in B} \varphi(x, y; b) = [\min_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(x, y; b), \max_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(x, y; b)]$$

и, следовательно,

$$F(X; B) = [f_1(u, v), f_2(u, v)] =$$
$$= [\min_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(s, y; b), \max_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(x, y; b)]. \quad (3)$$

Откуда, в частности,

$$f_1(u, v) = \min_{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v} \varphi(x, y; b_{\min}), \quad (4)$$

$$f_2(u, v) = \max_{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v} \varphi(x, y; b_{\max}). \quad (5)$$

Здесь векторы $b_{\min}$ и $b_{\max}$ такие, что

$$\min_{\substack{x,y\\ b\in B}} \varphi(x, y; b) = \min_{x,y} \varphi(x, y; b_{\min}),$$

$$\max_{\substack{x,y\\ b\in B}} \varphi(x, y; b) = \max \varphi(x, y; b_{\max}).$$

Если рассмотреть функцию $\lambda(z, b_1, b_2) = \omega[(\psi(z, b_1), \psi(z, b_2)])$, $b_1, b_2 \in B$, то легко видеть, что для функций f_1 и f_2 выполняется условие $\max \omega([\psi(z, b_1), \psi(z, b_2)]) = \omega([f_1(u, v), f_2(u, v)])$.

Таким образом, мы показали, что всякую однозначную интервальную функцию $F(X; B)$ можно единственным образом представить через граничные вещественные функции посредством формул (3)—(5).

3. Наши дальнейшие рассмотрения в этом параграфе будут заключаться в уточнении формул (3)—(5) при определенных условиях на $F(X; B)$. Будем предполагать, что все константы входят в функцию как простые, т. е. в F над константами произведены все операции. Такое представление назовем *каноническим*.

Например, функция (2) записана в каноническом виде, а функция $F(x; B_1) = [1, 2]^2x^2 + ([2, 4] + [1, 3])x + [4, 7]/[0{,}1; 0{,}8]$ — не в каноническом виде. Для ее записи в каноническом виде произведем все операции над интервалами-константами и получим $F(x; B_2) = [1, 4]x^2 + [3, 7]x + [5, 70]$.

Кроме того, будем считать, что функция F может быть интервально-значной по следующим причинам: 1) функция F есть функция вещественного аргумента x, но константы, входящие в F,— интервалы: $F = F(x; B)$; 2) функция F есть функция интервального аргумента X, константы, входящие в F,— вещественные числа (B — вырожденный вектор): $F = F(X)$; 3) аргумент функции F и константы, входящие в нее, есть интервальные векторы (сюда же, в частности, включается случай, когда F есть интервально-арифметическая суперпозиция выражений вида

$$B_i * [f_{i1}(t), \quad f_{i2}(t)],$$

где

$* \in \{+, -, \cdot, /\}$, $t = (u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$; $F = F(X, B)$.

Учитывая, что в интервальной арифметике справедливо равенство $(-1)[a, b] = [-b, -a]$ и что деление интервалов определяется через умножение, мы можем функцию $F(X, B)$ записать как суперпозицию выражений вида $B_i * F_i(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $*$ означает сложение или умножение интервалов. Это преобразование функции F и приведение ее к каноническому виду упрощает определение компонент $b_{\min}$ и $b_{\max}$, для нахождения которых достаточно проследить монотонность функции F по b_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Процесс определения функций f_1 и f_2 зависит от причин, по которым функция F может быть интервально-значной. В случае функции $F(x; B)$ знание аналитического выражения достаточно для нахождения f_1 и f_2. Действительно, рассмотрим F как суперпозицию в указанном выше смысле функций вида $[a_i, c_i] * \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Здесь возможны два случая.

1) $\varphi_i(x) > 0$. Если F по b_i возрастает, то a_i будет i-й компонентой вектора $b_{\min}$, а c_i — i-й компонентой вектора $b_{\max}$; если же убывает, то a_i будет i-й компонентой $b_{\max}$, а c_i — i-й компонентой $b_{\min}$.

2) $\varphi_i(x) < 0$. В этом случае критерий выбора компонент $b_{\min}$ и $b_{\max}$ противоположен предыдущему.

После нахождения векторов $b_{\min}$ и $b_{\max}$, подставляя в F вместо B $b_{\min}$, а затем $b_{\max}$, получим соответственно f_1 и f_2. Таким образом, формула (1) для $F(x;\ B)$ примет вид

$$F(x;\ B)=[F(x;\ b_{\min}),\ F(x;\ b_{\max})].$$

Если $n=1$ и $F(x;\ B)$ есть полином $F(x;\ B)=\sum_{i=0}^{m}[a_i,\ c_i]\,x^i$, то для него справедливо представление

$$F(x;\ B)=[f_1(x),\ f_2(x)]. \tag{6}$$

Здесь

$$f_1(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{m} a_i x^i & \text{при } x\geqslant 0,\\ \sum_{i=0}^{m}(a_i\theta(i)+c_i\gamma(i))\,x^i & \text{при } x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{m} c_i x^i & \text{при } x\geqslant 0,\\ \sum_{i=0}^{m}(a_i\gamma(i)+c_i\theta(i))\,x^i & \text{при } x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\gamma(i)=i-2[i/2]=\begin{cases}0 & \text{при } i=2k,\\ 1 & \text{при } i=2k+1,\end{cases}$$

$$\theta(i)=1-\gamma(i)=\begin{cases}1 & \text{при } i=2k,\\ 0 & \text{при } i=2k+1,\end{cases}$$

$[l]$ — целая часть числа l. Аналогичную формулу можно получить при $n>1$, когда $F(x;\ B)$ есть полином.

Теперь, возвращаясь к функции, заданной формулой (2), из формулы (6) получим для нее

$$f_1(x)=\begin{cases}\tilde{f}_1(x)=x^2-4x+3 & \text{при } x\geqslant 0,\\ \tilde{\tilde{f}}_1(x)=x^2-2x+3 & \text{при } x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\tilde{f}_2(x)=x^2-2x+5 & \text{при } x\geqslant 0,\\ \tilde{\tilde{f}}_2(x)=x^2-4x+5 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

4. Из определения функции $F(X)$ ясно, что существует единственная вещественная функция $f(x)$ такая, что $\operatorname{Rs}_{X\to x} F(X)=f(x)$ и $\operatorname{Di}_{x\to X} f(x)=F(X)$. Если в формуле (10) из § 1 гл. 1 выполнено равенство, т. е.

$$F(X)=\bigcup_{x\in X} f(x) \tag{7}$$

и f монотонно возрастает, то

$$F(X)=[f(u),\ f(v)], \tag{8}$$

если же при выполнении равенства (7) функция f монотонно убывает, то

$$F(X)=[f(v),\ f(u)]. \tag{9}$$

Формулы (8), (9) можно комбинировать, выделяя участки монотонности, когда функция f не является однотипно монотонной всюду в области. Последнее для конкретных функций может оказаться трудновыполнимым.

В общем случае можно поступить следующим образом. Пусть X_i встречается в F k_i раз и $\sum_{i=1}^{n} k_i=g$. Если каждой переменной X_i в F поставим в соответствие k_i вещественных переменных $s^j_{j_i}\in X_i\ (i=1,\ \ldots,\ k_j)$, то получим вещественную функцию $\hat{f}\left(s^1_1,\ \ldots,\ s_{h1}\right.$, $\left.s^2_1,\ \ldots,\ s^2_{k_n}\right)=\hat{f}(s)$ от q аргументов, в которой кратность каждого аргумента равна единице. Очевидно, что интервальное расширение $\hat{f}$ совпадает с $F(X)$, и поэтому для F справедливо представление

$$F(X)=[\min_{s^j_i\in X_i}\hat{f}(s),\ \max_{s^j_i\in X_i}\hat{f}(s)]. \tag{10}$$

Например, для функции $F(X_1, X_2)=(X_1^2+X_1)/X_1-X_2^3$ при $X_1=[x,\ y]>0$ и $X_2=[z,\ t]$ имеем $n=2$, $k_1=3$, $k_2=1$, $q=4$, $\hat{f}(s)=\hat{f}(s_1,\ \ldots,\ s_4)=(s_1^2+s_2)/s_3-s_4^3$. Тогда

$$F(X_1,\ X_2)=[(x^2+x)/y-t^3,\ (y^2+y)/x+z^3].$$

Пользуясь формулой (10), укажем представление через граничные вещественные функции интервального полинома вида

$$F(X)=\sum_{i=0}^{m} a_i X^i\quad (n=1).$$

$$\sum_{i\in T_1} c_i\left(\gamma(i)v^i+\theta(i)\max\left(u^i, v^i\right)\right)+\sum_{i\in T_2} c_i\left(\gamma(i)u^i+\right.$$
$$\left.+\theta(i)v^i\right)+\sum_{i\in T_3}\left(\max\left(a_iu^i, c_iv^i\right)\gamma(i)+\right.$$
$$\left.+c_i\max\left(u^i, v^i\right)\theta(i)\right]+B_0.$$

Эти представления естественным образом охватывают случаи, когда $F(X;\ B)$ есть полином вида $\sum_{i=0}^{m}[a_i, c_i]\,x^i$ и $\sum_{i=0}^{m} a_iX^i$. Отметим, что подобные представления имеют место при $n>1$ и, применяя способ 1, можно получить представление для любой рациональной функции.

Способ 2. Вначале находим $b_{\min}$ и $b_{\max}$, так же как и в случае функции вида $F(x;\ B)$, но дополнительно анализируем случай, когда $F_i(x)\ni 0$.

Применяем способ 1. Пусть $F_i(X)=[f_{i1}(t),\ f_{i2}(t)]$, где $f_{i1}(t)\leqslant 0$ и $f_{i2}(t)\geqslant 0$. Выбор компонент $b_{\min}$ и $b_{\max}$ разобьется на три подслучая:

1) $B_i>0$, тогда a_i есть i-я компонента $b_{\min}$, $c_i-b_{\max}$, 2) $B_i<0$, тогда a_i есть i-я компонента $b_{\max}$, $c_i-b_{\min}$, 3) $0\in B_i$.

Когда операция $*$ есть сложение, a_i — i-я компонента $b_{\min}$, $c_i-b_{\max}$. Пусть операция $*$ есть умножение. Если $\min(a_if_{i2}(t),\ c_if_{i1}(t))=a_if_{i2}(t)$, то a_i — i-я компонента $b_{\min}$, иначе c_i есть i-я компонента $b_{\min}$. Если $\max(a_if_{i1}(t),\ c_if_{i2}(t))=a_if_{i2}(t)$, то a_i есть i-я компонента $b_{\max}$, иначе c_i есть i-я компонента $b_{\max}$.

Выбрав $b_{\min}$ и $b_{\max}$, мы тем самым определим две функции: $F_{\min}(X)=F(X;\ b_{\min})$ и $F_{\max}(X)=F(X;\ b_{\max})$. Если к каждой из этих функций применить формулу (10), то получим $F_{\min}(X)=[f_{1\min}(t)],\ f_{2\min}(t)$, $F_{\max}(X)=[f_{1\max}(t),\ f_{2\max}(t)]$, откуда имеем представление для

$$F(X;\ B)=[f_{1\min}(t),\ f_{2\max}(t)]. \qquad (11)$$

Способ 3. Пусть

$$\operatorname*{Rs}_{X\to x} F(X;\ B)=\mathscr{F}(x;\ B),\ \operatorname*{Di}_{x\to X}\mathscr{F}(x;\ B)=F(X;\ B).$$

Как упоминалось выше (см. гл. 1, § 1),

$$F(X;\ B)\supseteq\bigcup_{x\in X}\mathscr{F}(x;\ B). \qquad (12)$$

Если в (12) выполнено равенство, то

$$F(X;\ B)=[\min_{x\in X}\mathscr{F}(x;\ b_{\min}),\ \max_{x\in X}\mathscr{F}(x;\ b_{\max})].$$

Иначе составляем функцию $\widehat{F}(s,\ B)$, аналогичную функции $\widehat{f}(s)$ для $F(X)$. Ясно, что

$$F(X;\ B)=\bigcup_{s_i^j\in X_i}\widehat{F}(s;\ B)\quad (j=1,\ldots,k_i;\ i=1,\ldots,n). \qquad (13)$$

Найдя для функций $\widehat{F}(s;\ B)$ векторы $b_{\min}$ и $b_{\max}$, получим для нее представление

$$\widehat{F}(s;\ B)=[\widehat{f}_1(s),\ \widehat{f}_2(s)]. \qquad (14)$$

Сопоставление (13) и (14) приводит к формуле

$$F(X;\ B)=$$
$$=[\min_{s_i^j\in X_i}\widehat{f}_1(s),\ \max_{s_i^j\in X_i}\widehat{f}_2(s)]\ (j=1,\ldots,k_i;\quad i=1,\ldots,n). \qquad (15)$$

Нетрудно видеть, что формулы (11) и (15) совпадают как представления одной и той же функции, но каждая из них в конкретном случае может оказаться более удобной, поскольку эти формулы отличаются способом получения в силу их конструктивности.

6. Как упоминалось выше, интервальный анализ успешно применяется для учета погрешностей при вычислениях. Например, при реализации на ЭВМ некоторого вещественного алгоритма, вообще говоря, после выполнения первой же операции из-за ошибок округлений у нас возникает интервальный результат, и на всех последующих этапах мы должны вести вычисления в рамках интервальной арифметики, если, конечно, желаем учитывать ошибки округлений. Полученный в итоге интервал дает нам двустороннюю аппроксимацию точного результата исходного вещественного алгоритма.

Предположим, что у нас имеется интервальный алгоритм, который необходимо реализовать. Естественно, что ожидаемые результаты — также интервалы.

В силу ошибок округлений, невозможности определения «действительной» области значений интервально-значной функции и т. п., получаемые интервалы при этом могут быть значительно шире, чем истинные.

Здесь предлагается следующий путь: расщепить интервальный алгоритм на два вещественных и каждый из них реализовать в интервальной арифметике. Таким образом, и в этом случае возникает проблема представления интервально-значной функции двумя граничными вещественными.

Проиллюстрируем это на примере. Пусть задана функция $F(x;\ B) = x^3 - [11/12,\ 4/3]x^2 + [2/3,\ 7/9]x + 0{,}1$ при $x \geqslant 0$ и требуется вычислить $F(1/3,\ B)$. Вместо $F(x;\ B)$ условимся писать $F(x)$. Проводя вычисления в интервальной арифметике округлений с тремя значащими цифрами, мы найдем $F(1/3) \subset [0{,}203;\ 0{,}272]$. Это есть «представление внешним интервалом» для $F(1/3)$. По формуле (6) получаем $F(x) = [f_1(x),\ f_2(x)]$, где $f_1(x) = x^3 - 4x^2/3 + 2x/3 + 0{,}1$, $f_2(x) = x^3 - 11x^2/12 + 7x/9 + 0{,}1$.

Вычисление $f_1(1/3)$ и $f_2(1/3)$ в интервальной арифметике округлений с тремя значащими цифрами дает: $f_1(1/3) \in [0{,}203;\ 0{,}228]$, $f_2(1/3) \in [0{,}255;\ 0{,}272]$.

Таким образом, для $F(1/3)$ одновременно получается представление внутренним интервалом $[\alpha,\ \beta] = [0{,}228;\ 0{,}255]$ и представление внешним интервалом $[\gamma,\ \tau] = [0{,}203;\ 0{,}272]$. За $F(1/3)$ можно принять интервал $[(\alpha+\gamma)/2,\ (\beta+\tau)/2]$, т. е. $F(1/3) = [0{,}215;\ 0{,}264]$.

Отметим, что нас не интересовала предыстория функции F. К примеру, это может быть объединенное расширение, интервальное расширение, центрированная форма, многозначная форма и другие (соответствующие определения см. в [5]).

§ 4. ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ИНТЕРВАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

1. Пусть $M = D = R$. Условимся элементы $I(R)$ и K, вложенные в R^2 (R^2 — двумерное эвклидово пространство), обозначать соответствующими буквами с чертой сверху. Операции между элементами будут

определяться тем множеством, которому они принадлежат.

Оператор Ψ, переводящий элемент R^2 в $I(R)$, определим равенством

$$\Psi(A) = \Psi((a,\ b)) = [\min\{a,\ b\},\ \max\{a,\ b\}].$$

Кроме того, обозначим через $P^n_{M_2}$ множество полиномов степени n в R^2:

$$P^n_{M_2} = \left\{P \mid P(\overline{X}) = \sum_{i=0}^{n} \overline{A}_i \overline{X}^i,\ \overline{X} \in M_2 \subset R_2\right\}.$$

Для простоты записи и в силу несущественности для дальнейших рассмотрений источника интервальности мы условимся писать элементы множества K в виде $F(X)$.

Пусть функция $F(X)$ задана в $(n+1)$-й точке $X_0 = [x_0,\ y_0]$, $X_1 = [x_1,\ y_1]$, ..., $X_n = [x_n,\ y_n]$, значениями $Y_i = [c_i,\ d_i]$, причем $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ $(i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Рассмотрим вопрос о приближении $F(X)$ некоторой интервально-значной функцией, принимающей те же значения Y_i в точках X_i, что и функция $F(X)$. При этом будем требовать, чтобы вещественное сужение приближающей функции было полиномом степени n.

Ниже мы рассмотрим интервальные аналоги интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, Эрмита и интервально-значные $\mathscr{L}$-сплайны. Для оценки погрешности интерполяционных формул нам потребуется понятие производной от интервально-значной функции, которое мы приведем здесь для удобства (см. также § 1). При формальном перенесении определения производной из классического анализа на случай интервально-значных функций свойства оператора дифференцирования «ухудшаются». Например, он становится нелинейным и, в частности, производная постоянной в этом случае не равна нулю.

Функция $F(X)$ называется *πK-дифференцируемой в точке* X, если существуют линейное отображение $dF(x): R^2 \to R^2$ и отображение $T: R^2 \to R^2$ с двумя свойствами:

1) $T((0,\ 0)) = (0,\ 0)$, $\lim\limits_{\|\Delta X\| \to 0} \dfrac{\|T(\Delta X)\|}{\|\Delta X\|} = 0$;

2) $\forall\Delta X$ из окрестности точки (0, 0)

$$\overline{F}(\overline{X}+\Delta X)-\overline{F}(\overline{X})=dF(\overline{X})\Delta X+T(\Delta X),$$

где $\Delta X=(h_1, h_2)$.

Определим два класса дифференцируемых функций. Будем говорить, что:

$F(X)\in D_V^1$, если $\forall X\in V\subset I(R)$ существует конечный предел

$$F'(X)=\lim_{\|\Delta X\|\to 0}\frac{\overline{F}(\overline{X}+\Delta X)-\overline{F}(\overline{X})}{\Delta X};$$

$F(X)\in D_V^2$, если $\forall X\in V\subset I(R)$ существует конечный предел

$$F'(x)=\lim_{\|\Delta X\|\to 0}\frac{\overline{F}(\overline{X}+\Delta X)-\overline{F}(\overline{X})}{\Delta\widetilde{X}},$$

где $\Delta\widetilde{X}=(h_2, h_1)$.

Если $F(X)\in D_V^i$ $(i=1\vee i=2)$ и $\Phi(X)\in D_V^i$ $(i=1\vee i=2)$, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) если $F(X)=\text{const}$, то $F'(X)=(0, 0)$;

2) если $F(X)=X$, то $F'(X)=(1, 1)$;

3) $[F+\Phi]'=F'+\Phi'$;

4) $[F\Phi]'=F'\overline{\Phi}+\overline{F}\Phi'$;

5) $[F/\Phi]'=[F'\overline{\Phi}-\overline{F}\Phi']/\Phi^2$ при $0\overline{\in}\Phi$.

В случае, когда F зависит от вещественного аргумента, D_V^1 и D_V^2 совпадают и производная имеет вид

$$F'(X)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{F}(x+\Delta x)-\overline{F}(x)}{\Delta x},$$

т. е. определенная нами производная совпадает с πF-производной (производной типа Фреше) от $F(X)$.

Следующая теорема характеризует класс функций, принадлежащих $D_V^i(i=1\vee i=2)$ в смысле их представимости граничными вещественными функциями.

Теорема. Пусть $F(X)\in D_V^i$ $(i=1\vee i=2)$ и функция $F'(X)$ непрерывна. Тогда функция $F(X)$ в некоторой ε-окрестности точки $X=[x, y]$ представима в виде $F(X)=[f_1(x), f_2(y)]$ (либо $F(X)=[f_1(y), f_2(x)]$).

Доказательство. Как было показано в § 2, существуют функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ такие, что справедливо представление $F(X)=[f_1(x, y), f_2(x, y)]$. С другой стороны, $dF(X)$ как линейное преобразование представимо в виде

$$dF(\Delta\vec{X})=F'\Delta\vec{X}, \tag{1}$$

где

$$F'=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix},\quad \Delta\vec{X}=\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}\left(\text{либо } \Delta\vec{X}=\begin{pmatrix}dy\\ dx\end{pmatrix}\right).$$

В силу (1) и определения производной получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}=0\quad\left(\text{либо } \frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y}=0\right),$$

что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим интервальный аналог интерполяционной формулы Лагранжа. Покажем, что интервально-значная функция

$$L(X)=\Psi\left(\sum_{j=0}^{n}Q_j(\overline{X})\,\overline{Y}_j\right), \tag{2}$$

где

$$X=[x, y],\quad Q_j(\overline{X})=\left(\frac{\prod\limits_{i\neq j}(x-x_i)}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)},\ \frac{\prod\limits_{i\neq j}(y-y_i)}{\prod\limits_{i\neq j}(y_j-y_i)}\right),$$

принимает в точках X_i значения Y_i и в случае вырожденных интервалов, а именно при $x=y$, $x_i=y_i$, $c_i=d_i$, переходит в известный интерполяционный полином Лагранжа. Действительно,

$$Q_j(X_i)=\begin{cases}(0, 0) & \text{при } i\neq j,\\ (1, 1) & \text{при } i=j.\end{cases}$$

Следовательно, $L(X_i)=\Psi\left(\sum\limits_{j=0}^{n}Q_j(X_i\ \ Y_j)\right)=Y_i$. Заметим, что функция L не является интервальным полиномом.

Если $x=y$, $x_i=y_i$, $c_i=d_i$, то

$$Q_j(\overline{X})=q_j(x)\prod_{i\neq j}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)},\quad q_j(x_i)=\delta_j^i,$$

где δ_j^i — символ Кронекера и, следовательно, $L(X)$ есть обычный интерполяционный полином Лагранжа.

Оценим погрешность интерполяционной формулы (2). Пусть значение функции $F(X)$ в точке X^0 заменяется значением $L(X^0)$. Для оценки приближения рассмотрим функцию

$$\Phi(\overline{X})=\overline{F}(X)-\overline{L}(\overline{X})-$$

$$-(\overline{X}-\overline{X}_0)(\overline{X}-\overline{X}_1)\ldots(\overline{X}-\overline{X}_n)N(\overline{X}_0), \tag{3}$$

где черта над $\overline{F}(X)$ и $\overline{L}(X)$ означает вложение области значений $F(X)$ и $L(X)$ в R^2, $N(\overline{X}_0)=[\overline{F}(X_0)-\overline{L}(X_0)]/[(\overline{X}_0-\overline{X}^0)(\overline{X}^0-\overline{X}_1)\ldots(\overline{X}^0-\overline{X}_n)]$. Из (3) видим, что $\Phi(\overline{X}_i)=(0,\ 0)$ при $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ и $\Phi(\overline{X}^0)=(0,\ 0)$. Если $F(X)$ — достаточно гладкая функция в смысле введенной производной, то, дифференцируя (3) $(n+1)$ раз, получим

$$\Phi^{(n+1)}(\overline{X})=F^{(n+1)}(\overline{X})-(n+1)!\ N(\overline{X}^0).$$

Предположим, что доказанная выше теорема справедлива для множества $M^*=\{X|\min x_i\leqslant x\leqslant\max x_i,\ \min y_i\leqslant y\leqslant\max y_i,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$. Тогда существует такая точка $X^*\in M^*$, в которой

$$\Phi^{(n+1)}(X^*)=F^{(n+1)}(X^*)-(n+1)!\ N(\overline{X}^0)=(0,\ 0).$$

Считая точку X^0 произвольной, имеем

$$R(\overline{X})=\overline{F(X)}-\overline{L(x)}=\frac{1}{(n+1)!}(\overline{X}-\overline{X}_0)(\overline{X}-\overline{X}_1)\ldots$$
$$\ldots(\overline{X}-\overline{X}_n)F^{(n+1)}(\overline{X}^*)$$

откуда, наконец, получаем оценку

$$\|R(\overline{X})\|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}M_{n+1}\|(\overline{X}-\overline{X}_0)(\overline{X}-\overline{X}_1)\ldots(\overline{X}-\overline{X}_n)\|$$

где

$$M_{n+1}=\max_{\overline{X}\in M^*}\|F^{(n+1)}(\overline{X})\|.$$

3. Рассмотрим интервальные аналоги интерполяционных формул Ньютона и Эрмита.

Пусть требуется найти некоторую функцию $H(X)$, которая в s различных точках X_k $(k=1,\ \ldots,\ s)$ принимала бы вместе со своими производными порядка p $(p=0,\ 1,\ \ldots,\ \alpha_k-1)$ данные значения $Y_k^{(p)}$ согласно условиям:

$$H^{(0)}(X_k)=H(X_k)=Y_k^{(0)}\in I(R),$$

$$H^{(j)}(\overline{X}_k)=Y_k^{(j)}\in R^2\ \ (k=1,\ldots,s;\ j=1,\ldots,\alpha_k-1),$$

причем предполагается, что при заданном n $\alpha_1+\ldots+\alpha_s=n+1$.

Если мы построим полиномы $L_{ik}\in P^n_{\text{М}^2}$ $(i=1,\ldots,s;$ $k=0,1,\ldots,\alpha_s-1)$, удовлетворяющие условиям:

$$L_{ik}^{(p)}(\overline{X}_m)=(0,0),\ m\neq i;\ p=0,1,\ldots,\alpha_m-1,$$

$$L_{ik}^{(p)}(\overline{X}_i)=\begin{cases}(0,0), & p\neq k,\\ (1,1), & p=k,\end{cases}$$

то решением поставленной задачи будет функция

$$H(X)=\psi\sum_{i=0}^{s}\{L_{i0}(\overline{X})\overline{Y}_i^{(0)}+L_{i1}(\overline{X})\overline{Y}_i^{(0)}$$
$$+\ldots+L_{i\alpha_i-1}(\overline{X})\overline{Y}_i^{(\alpha_i-1)}\},$$

которая является аналогом интерполяционной формулы Эрмита в случае вещественного аргумента. Действительно,

$$H^{(0)}(X_k)=\Psi\sum_{i=0}^{s}\{L_{i0}(\overline{X}_k)\overline{Y}_i^{(1)}+L_{i1}(\overline{X}_k)\overline{Y}_i^{(1)}+$$
$$+L_{i\alpha_i-1}(\overline{X}_k)\overline{Y}_i^{(\alpha_i-1)}\}=Y_k^{(0)}.$$

$$H^{(p)}(X_k)=\sum_{i=0}^{s}\left\{L_{i0}^{(p)}(\overline{X}_k)Y_i^{(0)}+L_{i1}^{(p)}(\overline{X}_k)Y_i^{(1)}+\ldots+\right.$$
$$\left.+L_{i\alpha_i-1}^{(p)}(\overline{X}_k)Y_i^{(\alpha_i-1)}\right\}=Y_k^{(p)}.$$

Найдем вид полинома $L_{ik}(\overline{X})$ по аналогии со случаем вещественного аргумента. При наших предположениях функция должна иметь вид

$$L_{ik}(\overline{X}) = \frac{A(\overline{X})}{(X - X_i)^{\alpha_i}} U_{ik}(\overline{X}), \quad A(\overline{X} = \prod_{\nu=1}^{s} (\overline{X} - \overline{X}_\nu)^{\alpha_\nu},$$

$U_{ik} \in P_{\mathrm{M}^2}^{\alpha_i - 1}$ и $U_{ik}(\overline{X})$ имеет нуль кратности k в точке X_i, т. е.

$$U_{ik}(\overline{X}) = (\overline{X} - \overline{X}_i)^k V_{ik}(\overline{X}), \quad V_{ik} \in P_{\mathrm{M}^2}^{\alpha_i - 1 - k}.$$

Нетрудно видеть, что полином V_{ik} является отрезком ряда Тейлора функции $\frac{1}{k!}(X - X_i)^{\alpha_i}/A(\overline{X})$. Итак,

$$L_{ik}(\overline{X}) = \frac{1}{k!} A(\overline{X})(\overline{X} - \overline{X}_i)^{k - \alpha_i} V_{ik}(\overline{X}),$$

а тогда

$$H(X) = \Psi \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{1}{k!} A(\overline{X})(\overline{X} - \overline{X}_i)^{k - \alpha_i} V_{ik}(\overline{X}) Y_i^{(k)}. \tag{4}$$

В случае $\alpha_i = 1$ имеем $k = 0$, $A(\overline{X})(\overline{X} - \overline{X}_i)^{\alpha_i} V_{i0}(\overline{X}) = Q_i$ и мы из (4) получим формулу (1).

Таким образом, получается аналог интерполяционной формулы Ньютона:

$$\begin{aligned} N(\overline{X}) = \Psi[\overline{A}_0 + \overline{A}_1(\overline{X} - \overline{X}_0) + \ldots \\ \ldots + \overline{A}_n(\overline{X} - \overline{X}_0) \ldots (\overline{X} - \overline{X}_{n-1})], \end{aligned} \tag{5}$$

где $\overline{A}_0 = \overline{F(X_0)}$,

$$\overline{A}_1 = (\overline{F(X_1)} - \overline{F(X_0)})/(\overline{X}_1 - \overline{X}_0),$$

$$\overline{A}_2 = \frac{\overline{F(X_2)} - \overline{F(X_0)}}{(\overline{X}_2 - \overline{X}_0)(\overline{X}_2 - \overline{X}_1)} - \frac{\overline{F(X_1)} - \overline{F(X_0)}}{(\overline{X}_2 - \overline{X}_0)(\overline{X}_1 - \overline{X}_0)} \text{ и т. д.}$$

Заметим, что формулы для $H(X)$ и $N(X)$ имеют вид, эквивалентный $L(X)$. Поэтому при достаточной гладкости функции $F(X)$ для $H(X)$ и $N(X)$ можно аналогичным образом, как и для $L(X)$, получить оценки остаточных членов.

4. Рассмотрим интервально-значные $\mathscr{L}$-сплайны. Пусть $\Phi(x, A) = \sum_{i=1}^{n} A_i g_i(x)$, где $A = (A_1, \ldots, A_n)$, $g_i(x) \in C^m$ [0, 1]. Тогда функцию

$$\Phi^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i g_i^{(k)}(x) \quad (0 \leqslant k \leqslant m)$$

назовем *формальной производной k-го порядка от* $\Phi(x)$. Определяемые ниже интервально-значные $\mathscr{L}$-сплайны будут подразумеваться дифференцируемыми в смысле существования формальной производной.

Будем говорить, что $S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$ есть пространство интервально-значных $\mathscr{L}$-сплайнов, если для любого элемента $S \in S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$ его сужение по всем интервальным константам $s \in S_p(\mathscr{L}, \Delta, z)$ — пространству $\mathscr{L}$-сплайнов [34].

Обсудим вопрос об интерполировании некоторой функции $G(x)$, заданной по сетке Δ: $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_N = 1$ элементами пространства S_p^I в следующем смысле:

$$S^{(j)}(x_i) = Y_i^j, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1, \quad 0 < i < N, \tag{6}$$

$$S^{(j)}(0) = Y_0^j, \quad S^{(j)}(1) = Y_N^j, \quad 0 \leqslant j \leqslant m - 1. \tag{7}$$

На каждом отрезке $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ вещественный $\mathscr{L}$-сплайн имеет представление [35]:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{2m} c_{ij} u_j(x), \tag{8}$$

где $u_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant 2m)$ — фундаментальное решение уравнения $\mathscr{L}^*\mathscr{L}u = 0$ на отрезке [0, 1] такое, что $u_j^{(\alpha)}(0) = \delta_j^{\alpha+1}$ ($\delta_j^{\alpha+1}$ — символ Кронекера). Здесь

$$\mathscr{L}u = \sum_{j=0}^{m} p_j(x) D^j u(x), \quad m \geqslant 1, \quad D^j = \frac{d^j}{dx^j}, \; p_j \in C^j[a, b],$$

$$\mathscr{L}^*u = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j D^j (p_j(x) u(x)), \quad p_m(x) > 0.$$

Очевидно, при фиксированных $s^j(x_i) \in Y_i^{(j)}$, $s^{(j)}(0) \in Y_0^{(j)}$, $s^{(j)}(1) \in Y_N^{(j)}$ мы будем иметь конкретный $\mathscr{L}$-

сплайн вида (8). Совокупность c_{ij}, определяемых конкретным $\mathscr{L}$-сплайном, согласно определению, есть некоторый интервал C_{ij}. Следовательно, в силу определения формальной производной и постановки задачи интерполирования элементами $S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$ множество $S(x) = \{s \in S(\mathscr{L}, \Delta, z) | s^{(j)}(x_i) \in Y_i^j, s^{(j)}(0) \in Y_0^j, s_N^{(j)} \in \in Y_N^j, 0 \leqslant j \leqslant m-1\}$ можно задать формулой $s(x) = \sum_{j=1}^{2m} c_{ij} u_j(x), \; x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Заметим, что, согласно определению, $s(x)$ есть интервально-значный $\mathscr{L}$-сплайн. Из единственности вещественных $\mathscr{L}$-сплайнов [35] очевидным образом следует единственнность интервально-значных $\mathscr{L}$-сплайнов.

Для оценки остаточного члена при интерполировании элементами $S_p(\mathscr{L}, \Delta, z)$ можно воспользоваться уже известными оценками для вещественного случая [34, 35], выбирая их в зависимости от гладкости сужения интерполируемой функции. Пусть, например, $\operatorname{Rs} G(x) = g(x) \in W_2^m[0, 1]$ и $s(x)$ — интервально-значный $\mathscr{L}$-сплайн, интерполирующий $G(x)$ в смысле (6)-(7). Тогда из теоремы 1.2 работы [32] получаем, что

$$D^j g(x) \in S^{(j)}(x) + [-1, 1] K\mu^{m-j-1/2} \| g(x) \|_{W_2^m[0,1]},$$

отсюда

$$\omega\left(G^{(j)}(x) - S^{(j)}(x)\right) \leqslant 2K\mu^{m-j-1/2} \sup \| \operatorname{Rs} G(x) \|_{W_2^m[0,1]}$$

где K — некоторая постоянная, $\mu = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant N-1} (x_{i+1} - x_i)$, а sup берется по всевозможным сужениям $G(x)$.

Рассмотрим вопрос о нахождении констант C_{ij}. Легко видеть, что здесь, как и в вещественном случае, возникает система линейных интервальных уравнений, решение которой является одной из задач интервального анализа. Заметим, что при непериодических краевых условиях, когда элементы $S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$ на каждом подынтервале есть кубические сплайны с интервальными коэффициентами, возникают системы интервальных уравнений с трехдиагональной интервальной матрицей, решение которых рассмотрим в следующем параграфе. В третьей главе мы изучим применение интервально-значных $\mathscr{L}$-сплайнов к решению дифференциальных уравнений.

§ 5. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Рассмотрим решение систем линейных уравнений с трехдиагональной интервальной матрицей. Пусть имеется система линейных уравнений

$$a_i^0 u_{i-1} + b_i^0 u_i + c_i^0 u_{i+1} = f_i^0 \, (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

с краевыми условиями $u_0 = \varphi$, $u_{N+1} = \psi$. Как известно, эта система может быть решена методом прогонки по формулам

$$u_i = x_i^0 u_{i+1} + y_i^0 (i = n, n-1, \ldots, 1), \qquad (2)$$

где коэффициенты x_i^0 и y_i^0 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} &x_0^0 = 0, \; y_0^0 = u_0, \\ &x_i^0 = -c_i^0/(a_i^0 x_{i-1}^0 + b_i^0), \\ &y_i^0 = (f_i^0 - a_i^0 y_{i-1}^0)/(a_i^0 x_{i-1}^0 + b_i^0). \end{aligned} \qquad (3)$$

Однако на практике, даже если мы знаем точные значения $a_i^0, b_i^0, c_i^0, u_0, u_{n+1}$, в машине эти числа часто не могут быть представлены точно и, оставаясь в множестве R_M, мы можем указать лишь интервалы, в которых они лежат. Кроме того, при больших n существенное влияние на результат могут оказать ошибки округлений. Это делает оправданным следующее интервально-аналитическое рассмотрение системы (1). Пусть

$$a_i^0 \in A_i, \; b_i^0 \in B_i, \; c_i^0 \in C_i, \; u_0 \in \Phi, \; u_{n+1} \in \Psi, \qquad (4)$$
$$f_i^0 \in F_i (i = 1, \ldots, n).$$

Положим

$$\tilde{U}_i = \{u_i | a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i, \; a_i \in A, \; b_i \in B_i, \; c_i \in C_i, \; f_i \in F_i, \; u_0 \in \Phi, \; u_{n+1} \in \Psi\} \; (i = 1, \ldots, n).$$

Ясно, что u_i — решение системы (1) — принадлежит

3*

$\widetilde{U}_i$ $(i=1, \ldots, n)$. В общем случае найти точно $\widetilde{U}_i$ довольно трудно. Однако можно указать интервалы, содержащие $\widetilde{U}_i$.

Теорема 1. Пусть интервалы U_i определяются рекуррентными соотношениями

$$U_i = X_i U_{i+1} + Y_i \quad (i = n, n-1, \ldots, 1),$$
$$U_{n+1} = \Psi, \ U_0 = \Phi, \tag{5}$$

где

$$X_0 = 0, \ Y_0 = U_0 = \Phi,$$
$$X_i = \frac{C_i}{A_i X_{i-1} + B_i}, \ Y_i = \frac{F_i - A_i Y_{i-1}}{A_i X_{i-1} + B_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Тогда $\widetilde{U}_i \subset U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. В силу определения $\widetilde{U}_i$ нам достаточно показать, что при любом выборе $a_i \in A_i$, $b_i \in B_i$, $c_i \in C_i$, $u_0 \in \Phi$, $u_{n+1} \in \Psi$ соответствующее решение системы

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

для которой u_0 и u_{n+1} считаются заданными соответственно из интервалов Φ и Ψ, принадлежит U_i. Если в записи формул (2), (3) опустить верхний индекс «о», то полученные формулы дадут решение системы (7).

Вначале методом индукции покажем, что $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$. Так как $x_0 = X_0 = 0$, $y_0 = u_0 \in U_0 = Y_0$, первый шаг индукции выполнен. Пусть $x_{i-1} \in X_{i-1}$, $y_{i-1} \in Y_{i-1}$. Тогда по теореме 1 из гл. I, § 1 имеем

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i x_{i-1} + b_i} \in \frac{C_i}{A_i X_{i-1} + B_i} = X_i$$

и

$$y_i = \frac{f_i - a_i y_{i-1}}{a_i x_{i-1} + b_i} \in \frac{F_i - A_i Y_{i-1}}{A_i X_{i-1} + B_i} = Y_i.$$

Теперь заметим, что $u_{n+1} \in \Psi = U_{n+1}$ по условию. Пусть $u_i \in U_i$ для $i = n+1, n, \ldots, n-k+1$. Поскольку $u_{n-k} = x_{n-k} u_{n-k+1} + y_{n-k}$, опять по указанной теореме 1 имеем $u_{n-k} \in X_{n-k} U_{n-k+1} + Y_{n-k} = U_{n-k}$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, мы пришли к интервальному варианту метода прогонки. Разумеется, интервальная прогонка может быть реализована лишь в том случае, когда в формулах (6) нам не придется делить на интервал, содержащий нуль. Следующая теорема дает достаточное условие реализуемости интервальной прогонки и условие устойчивости относительно начальных возмущений.

Теорема 2. Пусть: 1) $0 \notin B_i$; 2) существует $\delta > 0$ такое, что

$$\min\{|b_i^1|, |b_i^2|\} \geqslant \|A_i\| + \|C_i\| + \delta, \quad \|A\| = \|[a, b]\| = \\ = \max\{|a|, |b|\}.$$

Тогда $0 \notin A_i X_{i-1} + B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $X_j \subset [-1, 1]$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Положим $M = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{\|B_i\|\}$. Тогда из условий 1), 2) следует, что $\|A_i\| \leqslant M - \delta$, $\|C_i\| \leqslant M - \delta$. Это означает, что существуют такие $\alpha_i \geqslant \delta$ и $\gamma_i \geqslant \delta$, для которых выполнены равенства $\|A_i\| = M - \alpha_i$, $\|C_i\| = M - \gamma_i$. Отсюда

$$A_i \subseteq [-(M - \alpha_i), M - \alpha_i], \ C_i \subseteq [-(M - \gamma_i), M - \gamma_i]. \tag{8}$$

Теперь по индукции покажем, что $0 \notin A_i X_{i-1} + B_i$ и $X_j \subset [-1, 1]$. Имеем $X_0 = 0 \in [-1, 1]$, $A_1 X_0 + B_1 = B_1 \not\ni 0$. В силу условий теоремы либо $B_1 \subset [-M, -(M - \gamma_1 + \delta)]$, либо $B_1 \subset [-M - \gamma_1 + \delta, M]$. По теореме 1 из гл. I, § 1 имеем

$$X_1 = - \\ -\frac{C_1}{B_1} \subset \left[-1 + \frac{\delta}{M - \gamma_1 + \delta}, \ 1 - \frac{\delta}{M - \gamma_1 + \delta}\right] \subset [-1, 1].$$

Пусть $0 \notin A_i X_{i-1} + B_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, $X_j \subset [-1, 1]$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$. Тогда $0 \notin A_k X_{k-1} + B_k$, $X_k \subset [-1, 1]$. Действительно, по теореме 1 из гл. I, § 1 и в силу условий доказываемой теоремы имеем $A_k X_{k-1} + B_k \subseteq [-(M - \alpha_k), M - \alpha_k][-1, 1] \pm [2M - (\alpha_k + \delta_k) + \delta, M]$. В случае знака «плюс» имеем $[-(M - \alpha_k), M - \alpha_k][-1, 1] + (2M - (\alpha_k + \gamma_k) + \delta, M) = [-M + \alpha_k + 2M - \alpha_k - \gamma_k - \delta, 2M - \alpha_k] = [M - \gamma_k + \delta, 2M - \alpha_k]$. В случае знака «минус» получим

$$[-(M - \alpha_k), M - \alpha_k][-1, 1] - (2M - (\alpha_k + \gamma_k) + \delta, M] = \\ = [-(2M - \alpha_k), -(M - \gamma_k + \delta)].$$

Таким образом, в обоих случаях $0 \notin A_k X_{k-1} + B_k$.

Аналогично доказывается и второе утверждение:

$$X_k = \frac{C_k}{A_k X_{k-1} + B_k} \subseteq \frac{[-(M-\gamma_h), M-\gamma_h]}{\pm [M-\gamma_h+\delta, 2M-\alpha_h]} =$$

$$= \left[\frac{-(M-\gamma_h), M-\gamma_h}{M-\gamma_h+\delta, 2M-\alpha_h}\right] = \left[-\frac{M-\gamma_h}{M-\gamma_h+\delta}, \frac{M-\gamma_h}{M-\gamma_h+\delta}\right] \subset$$

$$\subset [-1, 1].$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что условие 2) в случае вырожденных интервалов совпадает с условием обусловленности.

2. Если нас не удовлетворяет ширина интервалов U_i, то можно предложить следующие алгоритмы сужения U_i до $\tilde{U}_i$.

1. Разделим каждый из интервалов A_i, B_i, C_i, F_i, Ψ, Φ на k подынтервалов (для простоты можно делить на равные подынтервалы). Например, если $[a, b] = [a, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{k-1}, b]$, то $a_{j+1} - a_j = (b-a)/k$, $a_0 = a$, $a_k = b$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$. Далее фиксируем j $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ и выбираем из $A = (A_1, \ldots, A_n)$, $B = (B_1, \ldots, B_n)$, $C = (C_1, \ldots, C_n)$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ соответствующие j-интервальные векторы, а из Ψ и Φ — краевые условия и составляем k интервальных систем. Пусть $U^k_{(1)}, \ldots, U^k_{(k)}$ есть соответственно решения этих систем. Из определения операций интервальной арифметики следует, что $U^k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} U^k_{ij}$ удовлетворяет включениям $\tilde{U} \subseteq U^k \subseteq U$, где обозначено $\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n)$, $U = (U_1, \ldots, U_n)$. В силу определения $\tilde{U}$ при $k \to \infty$ будем иметь $d\left(U^k_i, \tilde{U}_i\right) \to 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $d(A, B) = d([a, b], [c, d]) = \max(|a-c|, |b-d|)$. Как мы видим, при $k \to \infty$ $\tilde{U}$ может быть получено с произвольной точностью. Однако здесь остается открытым вопрос о скорости сходимости.

2. Можно оптимизировать приведенную выше схему получения $\tilde{U}$ так, что скорость сходимости будет квадратична относительно $1/k$.

3. В работе [36] рассмотрены итерационные методы решения систем интервальных уравнений вида $U = WU + B$, где $W = (W_{ij})$ — интервальная матрица $\left(W_{ij} = [w^1_{ij}, w^2_{ij}]\right)$, B — известный вектор, U — неизвестный интервальный вектор. В частности, для итерационной схемы вида $U^{k+1} = WU^k + B$ необходимым и достаточным условием сходимости при любом выборе начального вектора U^0 является неравенство $\rho(|W|) = \rho\left(\left[\max\left(|w^1_{ij}|, |w^2_{ij}|\right)\right]\right) < 1$, в котором символ ρ означает спектральный радиус матрицы, заключенной в скобки. Если вектор U^0 таков, что $U^0 \supset U^*$, $U^* = WU^* + B$, то $U^* \subset U^k$ при любом k. В общем случае указание подобного вектора U^0 является проблематичным, но необходимым, поскольку итерирование в интервальной арифметике округлений предполагает именно такое приближение извне к искомому решению. Здесь же, когда матрица W трехдиагональна, в качестве U^0 достаточно взять U, полученное интервальной прогонкой, а итерации вести по схеме $U^{k+1} = \overline{W}U^* + \overline{B}$, где $\overline{W} = \left(E - \overline{W}^1_R W\right)$, $\overline{B} = W_R^{-1} B$, W_R — произвольная вещественная матрица, принадлежащая W. В этом случае будет справедливо включение $\{W_R^{-1} f \mid W_R \in W,\ f \in F\} \subset U^*$ и, очевидно, что $U^* = \tilde{U}$. На практике в качестве W_R можно брать матрицу, составленную из средних точек интервалов W_{ij}. Заметим, что аналогично можно сформулировать метод интервальной матричной прогонки.

3. Пусть теперь система трехчленных уравнений решается при условиях

$$a^0_{i+n} = a^0_i,\ b^0_{i+n} = b^0_i,\ c^0_{i+n} = c^0_i,\ f^0_{i+n} = f^0_i,\ u^0_{i+n} = u^0_i. \} \tag{9}$$

Если коэффициенты уравнений заданы точно и нет необходимости учитывать ошибки округлений, то задача (1), (9) решается методом циклической прогонки [37]. В случае, когда это не так и коэффициенты заданы в форме интервалов, возникает необходимость в определении множеств

$$\tilde{U}_i = \{u_i \mid a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i w_{i+1} = f_i;\ a_{i+n} = a_i \in A_i = A_{i+n};$$
$$b_{i+n} = b_i \in B_i = B_{i+n};\ c_{i+n} = c_i \in C_i = C_{i+n};$$
$$f_{i+n} = f_i \in F_i = F_{i+n}\}. \tag{10}$$

Т е о р е м а 3. Пусть интервалы U_i определяются соотношениями

$$X_{i+1} = -\frac{C_i}{A_i X_i + B_i}, \quad Y_{i+1} = \frac{F_i - A_i Y_i}{A_i X_i + B_i},$$
$$Z_{i+1} = -\frac{A_i Z_i}{A_i X_i + B_i} \quad (i = 2, 3, \ldots, n); \tag{11}$$

$$Q_i = X_{i+1}Q_{i+1} + Z_{i+1} \quad (i = n-2, \ \ldots, \ 1),$$
$$P_i = X_{i+1}P_{i+1} + Y_{i+1}, \tag{12}$$
$$P_{n-1} = Y_n, \ Q_{n-1} = X_n + Z_n;$$

$$U_n = \frac{Y_{n+1} + X_{n+1}P_1}{1 - X_{n+1}Q_1 - Z_{n+1}},$$
$$U_i = P_i + U_nQ_i \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{13}$$

Тогда $\tilde{U}_i \subseteq U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Заметим, что соотношения (11)—(13) в случае вырожденных интервалов дают формулы циклической прогонки [37] для решения системы уравнений (1) при условиях (9). Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, трехкратным применением метода математической индукции и теоремы 1 из гл. I, § 1.

Отметим, что из соотношений (10)—(13) вытекает $U_i = U_{i+n}$.

Следующая теорема дает достаточные условия реализуемости и устойчивости интервального варианта циклической прогонки, определяемого формулами (11)—(13).

Теорема 4. Пусть: 1) $0 \notin B_i$, 2) $A_i, C_i \geqslant 0$, 3) $\exists \delta > 0$ такое, что $\min\{|b_i^1|, |b_i^2|\} \geqslant (\|A_i\| + \|C_i\| + \delta)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $0 \notin A_iX_i + B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, $0 \notin 1 - X_{n+1}Q_1Z_{n+1}$, $X_k \subset [-1, \ 1]$ $(k = 2, \ \ldots, \ n)$.

Доказательство. Устойчивость интервального варианта циклической прогонки, а именно условие $X_i \subset [-1, \ 1]$ доказывается так же, как и в теореме 2. С учетом той же теоремы для доказательства реализуемости метода достаточно показать, что $0 \notin 1 - X_{n+1}Q_1 - Z_{n+1}$.

Воспользовавшись тем, что для интервальных чисел A и B справедливы неравенства $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$, покажем, что $\|X_{i+1}\| + \|Z_{i+1}\| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

При $i = 1$ имеем

$$\|X_2\| + \|Z_2\| = \left\| -\frac{C_1}{B_1} \right\| + \left\| -\frac{A_1}{B_2} \right\| \leqslant \frac{\|C_1\| + \|A_1\|}{\min\{|b_1^1|, |b_1^2|\}} < 1.$$

Если $i = 2, 3, \ldots, n$, то

$$\|X_{i+1}\| + \|Z_{i+1}\| = \left\| -\frac{C_i}{A_iX_i + B_i} \right\| + \left\| -\frac{A_iZ_i}{A_iX_i + B_i} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|C_i\| + \|A_i\| \cdot \|Z_i\|}{\min\{|b_i^1|, |b_i^2|\} - \|A_i\| \cdot \|X_i\|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|C_i\| + \|A_i\|(1 - \|X_i\|)}{\|A_i\| + \|C_i\| + \delta - \|A_i\| \cdot \|X_i\|} < 1.$$

Теперь из соотношений для Q_i можно получить, что $\|Q_i\| < 1$ $(i = n-1, \ldots, 1)$. Отсюда

$$\|X_{n+1}Q_1 + Z_{n+1}\| \leqslant \|X_{n+1}\| \cdot \|Q_1\| + \|Z_{n+1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|X_{n+1}\| + \|Z_{n+1}\| < 1.$$

Пусть $X_{n+1}Q_1 + Z_{n+1} = [\beta, \tau]$. Так как $|\beta| < 1$ и $|\tau| < 1$, то $1 - [\beta, \ \tau] = [1 - \tau, \ 1 - \beta] \not\ni 0$. Теорема доказана.

4. Применение интервальных методов для решения систем линейных алгебраических уравнений является одной из наиболее разработанных областей интервальной математики. Здесь можно отметить все более выявляющуюся эффективность интервальных алгоритмов при численной реализации на ЭВМ, допускающих формулировку новых понятий численного анализа, например численной сходимости метода [38, 39]. На языке интервального исчисления легко переносятся многие классические методы вычислительной математики, но далеко не столь легко отсюда следуют их сходимость и простота реализации. Поэтому естественна связь интервальных методов со множеством машинно-представимых чисел, которой мы будем, по возможности, придерживаться в дальнейшем.

Пусть l — длина машинной ячейки, отводимой под запись мантиссы числа. Будем обозначать через M_l — множество машинно-представимых чисел $\tilde{z} = mb^l$, где $m = \sum_{k=1}^{l} a_k b^{-k}$. На множестве машинных чисел введем машинные арифметические операции

$$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} = \{\tilde{+}, \ \tilde{-}, \ \tilde{x}, \ \tilde{/}\},$$
$$\tilde{\omega}: \begin{cases} M_l \times M_l \to M_l, \\ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \tilde{\alpha}\tilde{\omega}\tilde{\beta} \in M_l, \end{cases}$$

причем $\widetilde{\alpha}\widetilde{\omega}\widetilde{\beta} = (\widetilde{\alpha\omega\beta})(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| \leqslant kb^{-l}$, где k не зависит от l. После этого определим интервалы машинных чисел $[\widetilde{\alpha}] = [\widetilde{\alpha}_1(l), \widetilde{\alpha}_2(l)]$, где $\widetilde{\alpha}_1(l), \widetilde{\alpha}_2(l) \in M_l$, и $I(M_l)$ — множество всех таких интервалов, а также машинные интервальные операции

$$\widetilde{\omega}: \begin{cases} I(M_l)\times I(M_l) \to I(M_l), \\ ([\widetilde{\alpha}], [\widetilde{\beta}]) \to [\widetilde{\alpha}][\widetilde{\omega}][\widetilde{\beta}] \in I(M_l), \end{cases}$$

$$[\widetilde{\alpha}][\widetilde{\omega}][\widetilde{\beta}] = [\min(\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\omega}_\nabla\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\alpha}_1\widetilde{\omega}_\nabla\widetilde{\beta}_2, \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\omega}_\nabla\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\omega}_\nabla\widetilde{\beta}_2),$$
$$\max(\widetilde{\alpha}_1\widetilde{\omega}_\Delta\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\alpha}_1\widetilde{\omega}_\Delta\widetilde{\beta}_2, \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\omega}_\Delta\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\alpha}_2\widetilde{\omega}_\Delta\widetilde{\beta}_2)].$$

Здесь $\widetilde{\omega}_\nabla, \widetilde{\omega}_\Delta : M_l \times M_l \to M_l$,

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}\widetilde{\omega}_\nabla\widetilde{\beta} \leqslant \widetilde{\alpha}\widetilde{\omega}\widetilde{\beta}, \\ \widetilde{\alpha}\widetilde{\omega}_\Delta\widetilde{\beta} \geqslant \widetilde{\alpha}\widetilde{\omega}\widetilde{\beta}. \end{cases}$$

5. Опишем интервальный вариант метода исключения Гаусса решения системы линейных уравнений $Ax = b$, где $A = (a_{ik})_{n\times n}$, $b = (b_k)_{1\times n}$. Пусть заданы интервалы, содержащие коэффициенты исходной системы $a_{ik} \in [a_{ik}]$, $b_k \in [b_k]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Определим следующий алгоритм приведения интервальной матрицы $[A]$ к двум интервальным треугольным матрицам $[L]$ и $[R]$: $[a_{ik}^{(1)}] = [a_{ik}]$, $[a_{ik}^{(j+1)}] = [a_{ik}^{(j)}] - [a_{ij}^{(j)}][g_{ik}]$, $[g_{ik}] = [a_{ik}]/[a_{jj}^{(j)}]$ $(j = 1, \ldots, n-1;\ k = j+1, \ldots, n;\ i = k, \ldots, n)$. При этом полагаем $0 \overline{\in} [a_{jj}^{(j)}]$ $\forall j$. Тогда получим матрицы $[L]$, $[R]$:

$$[l_{ik}] = \begin{cases} [a_{ik}^{(k)}] & \text{для } i \geqslant k, \\ 0 & \text{для } i < k, \end{cases}$$

$$[r_{ik}] = \begin{cases} [g_{ik}] & \text{для } i < k, \\ 1 & \text{для } i = k, \\ 0 & \text{для } i > k. \end{cases}$$

Решая интервальные системы

$$[L][y] = [b],$$
$$[R][x] = [y],$$

получим интервальный вектор $[x]$, содержащий точное решение x исходной системы.

Аналогично методу Гаусса для системы линейных уравнений с вещественными коэффициентами производится выбор главного элемента. Им называется интервал $[\alpha]$, для которого величина

$$M(|\alpha|) = \begin{cases} \lambda([\alpha])/\inf(|[\alpha]|), & 0 \overline{\in} [\alpha], \\ \infty, & 0 \in [\alpha] \end{cases}$$

принимает минимальное значение [40]. При этом мы подразумеваем, что всюду используются машинные интервальные операции.

Пусть вычисляется интервальная функция $F(X)$. Назовем ее численно сходящейся [38], если выполняется соотношение:

$$\left.\begin{cases} \exists l_1 \in N : \widetilde{x}(l) \supseteq x, & l \geqslant l_1 \\ \lim\limits_{l\to\infty} \widetilde{x}(l) = x \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\exists l_2 \in N : \widetilde{F}(\widetilde{X}(l)) \supseteq F(X) \\ &\lim_{l\to\infty} \widetilde{F}(\widetilde{X}(l)) = F(X) \end{aligned}\right\}.$$

Используя свойства численной сходимости рациональных интервальных выражений, Wongwises [28] показал, что $\lim\limits_{l\to\infty} [\widetilde{x}(l)] = x$ при условии $\lim\limits_{l\to\infty} [\widetilde{A}] = A$, $\lim\limits_{l\to\infty} [\widetilde{b}] = b$. Поскольку полученный интервальный вектор $[\widetilde{x}(l)]$ является довольно неточным интервальным решением, возможно проводить итерационный процесс повышения его точности.

Пусть $[\mathrm{res}_i^{(k)}] = b_i [-] a_{ik} [\times] \widetilde{x}_i^{(k)}$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\widetilde{x}_i^{(k)} \in [x^{(k)}]$ определяется из условия $\min M([x])$. Тогда решаем систему уравнений относительно вектора $[d^{(k)}]$:

$$[L][R][d^{(k)}] = [\mathrm{res}^{(k)}],$$

и найдем интервальный вектор

$$[x^{(k+1)}] = \{[x^{(k)}][+][d^{(k)}]\} \cap [x^{(k)}] \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Итерации проводятся вплоть до выполнения условия $\lambda([x^{(k+1)}]) = \lambda([x^{(k)}])$.

При выполнении естественного условия $\|I - \widetilde{R}^{-1}\widetilde{L}^{-1}A\| < 1$, а также условий $\lim\limits_{l\to\infty} \widetilde{x}(0) = x$, $\lim\limits_{l\to\infty} [x^{(0)}] = x$ можно показать, что $\lim\limits_{l\to\infty} \widetilde{x}^{(k)} = x$ и

$\lim\limits_{l\to\infty}[x^{(k)}]=x$. Здесь использованы обозначения $\tilde{L}^{-1}$, $\tilde{R}^{-1}$, показывающие, что обратные матрицы L^{-1}, R^{-1} вычисляются в интервальной арифметике округлений.

Глава III

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интерес к использованию интервальных методов при решении дифференциальных уравнений объясняется тем, что в рамках интервального анализа исходные данные дифференциальной задачи могут быть заданы в форме интервалов, и полученные решения учитывают не только ошибки в исходных данных, но и ошибки аппроксимации и округлений. Ниже приведен ряд интервальных методов решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, а также примеры использования интервальных методов при решении дифференциальных уравнений с частными производными. Теория интервальных методов решения дифференциальных уравнений в настоящее время еще далека от завершения.

§ 1. ИНТЕРВАЛЬНЫЙ МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши

$$dy/dx=f(y),\quad y=y(x),\quad x\in R, \tag{1}$$

$$y(0)=y_0. \tag{2}$$

Предположим, что функция $f(y)$ определена и имеет две первые ограниченные производные на интервале $A=[a, b]$.

Рассматриваемый ниже метод решения задачи (1), (2) допускает неточно заданные начальные данные, а именно предположим, что существует интервал Y_0 такой, что он лежит строго в A и $y_0\in Y_0$. Кроме того,

предположим, что функция $f(y)$ имеет интервальное расширение $F(Y)$, обладающее следующими свойствами:

1) функция $F(Y)$ определена и непрерывна при всех $Y\subset A$;

2) функция $F(Y)$ монотонна по включению, т. е. из того, что $Y_1\subset Y_2$, следует $F(Y_1)\subset F(Y_2)$;

3) существует число $l>0$ такое, что $\omega(F(Y))\leqslant l\omega(Y)$ для всех $Y\subset A$, а также существует $\Psi(Y)$ — интервальное расширение функции $f(ff''+(f')^2)$, которое определено при $Y\subset A$ и монотонно по включению.

Поскольку Y_0 лежит в A, для некоторого конечного $h_0>0$ найдется число $\xi>0$ такое, что

$$Y_0+\xi\left(F(A)-h_0^2\Psi(A)/12\right)\subset A.$$

Интервальное решение построим на отрезке $[0, \xi]$, для этого разобьем его на m частей точками $x_i=ih$ $(i=0, 1, \ldots, m)$, $h=\xi/m<h_0$. Имеет место

Теорема 1. Если интервалы $Y(x_i)=Y_i$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ определяются формулами

$$Y_0=Y(x_0)=Y(0), \tag{3}$$

$$Y_{i+1}=Y_i+(h/2)\{F(Y_i)+F(Y_i+hF(Y_i+[0,h]\times \times F(A)))\}-(h^3/12)\Psi(Y_i+[0,h]\times F(A)) \tag{4}$$

$$(i=0, 1, \ldots, m),$$

то для любого решения $y(x)$ уравнения (1), такого, что $y(0)\in Y_0$, справедливы включения $y(x_i)\in Y_i$ $(i=1, \ldots, m)$ и имеет место следующая оценка для ширины интервалов Y_i:

$$\omega(Y_i)\leqslant Nh^2+M\omega(Y_0), \tag{5}$$

где N и M — вещественные постоянные, не зависящие от i и h.

Доказательство. Воспользуемся методом индукции. Имеем $y(x_0)=y_0\in Y_0=Y(x_0)$. Пусть $y(x_j)\in Y(x_j)$ при $j=1, \ldots, k$. Тогда $y(x_{k+1})\in Y(x_{k+1})$. Действительно, для $y(x_{k+1})$ справедливо представление

$$y(x_{k+1})=y(x_k+h)=y(x_k)+\int_0^h y'(x_k+t)\,dt. \tag{6}$$

Интеграл в правой части (6) представим по формуле трапеций в виде

$$\int_0^h y'(x_k+t)\,dt = \frac{1}{2}h\,(y'(x_k) - y'(x_k+h)) -$$
$$- y'''(x_k+\theta h)\,h^3/12, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \quad (7)$$

Выражая y' и y'' через функцию f и ее производные, в силу уравнения (1) с учетом (7) вместо (6) получим

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\{f(y(x_k)) + f(y(x_k+h))\}/2 -$$
$$- h^3\{f(ff'' + (f')^2)\}/12\,|_{y(x_k+\theta h)}. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$y(x_k+h) = y(x_k) + hf(y(x_k)) + \alpha hf(y(x_k+\beta h)),$$
$$0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1. \quad (9)$$
$$y(x_k+\theta h) = y(x_k) + \theta hf(y(x_k+\gamma h)),\ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

Пользуясь соотношениями (8), (9) и свойством монотонности функций $F(Y)$ и $\Psi(Y)$ в силу предположения индукции имеем $y(x_{k+1}) \in Y(x_{k+1})$.

Докажем теперь оценку (5). Пользуясь очевидными свойствами функции ω: $\omega(A \pm B) = \omega(A) + \omega(B)$ $\omega(A) \leqslant 2\|A\|$, и третьим свойством функции F, получим

$$\omega(Y_{i+1}) \leqslant \omega(Y_i) + h\{l\omega(Y_i) + hl^2\omega(Y_i) +$$
$$+ 3h^2l^2\|F(A)\|\}/2 + h^3\omega(\Psi(A))/12. \quad (10)$$

Учитывая, что $hl/2 \leqslant h_0l/2 = \delta$ неравенство (10) запишем в виде

$$\omega(Y_i) \leqslant (1 + (1+\delta)hl)\omega(Y_i) + ch^3, \quad (11)$$

где $c = 3l^2\|F(A)\|/2 + \omega(\Psi(A))/12$. Из (11) легко выводится соотношение

$$\omega(Y_i) \leqslant (1 + (1+\delta)hl)^i\omega(Y_0) +$$
$$+ (1 + (1+\delta)hl)^i/(1+\delta)l < h^2. \quad (12)$$

Величина $(1 + (1+\delta)hl)^i$ оценивается сверху: $(1 + (1+\delta)hl)^i \leqslant (1 + (1+\delta)hl)^m \leqslant \exp((1+\delta)l\xi)$. Следовательно, вместо (12) можно записать

$$\omega(Y_i) \leqslant \exp((1+\delta)l\xi)\omega(Y_0) +$$
$$+ c(\exp((1+\delta)l\xi) - 1)h^2/(1+\delta)l.$$

Отсюда, вводя обозначения $N = c(\exp((1+\delta)l\xi) - 1)/(1+\delta)l$, $M = \exp((1+\delta)l\xi)$, получим (5). Теорема доказана.

В случае системы уравнений

$$dy_i/dx = f_i(y), \quad (13)$$

которая должна удовлетворять начальным условиям

$$y_i(0) = y_{i0} \in Y_{i0} = Y_i(0) \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (14)$$

где $y \in A$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $A = (A_1, \ldots, A_n)$, имеем

$$y_i''' = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[(f_i)''_{y_k y_j} + (f_i)'_{y_k} (f_i)'_{y_j} \right] f_j.$$

Если $F_i(Y) = F_i(Y_1, \ldots, Y_n)$, $\Psi_i(Y) = \Psi(Y_1, \ldots, Y_n)$ есть интервальные расширения соответственно функций f_i и y_i''', определенные на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, то можно построить интервальное решение задачи (13), (14) по формулам, аналогичным (3), (4):

$$Y_{i0} = Y_i(0)$$
$$Y_i(x_{k+1}) = Y_{ik+1} = Y_{ik} + (h/2)\{F_i(Y_{1k}, \ldots, Y_{nk}) +$$
$$+ F_i(Y_{1k} + hF_1(Y_{1k} + [0,\ h]F_1(A), \ldots, Y_{nk} + [0,\ h]F_n(A)),$$
$$Y_{2k} + hF_2(Y_{1k} + [0,\ h]F_1(A), \ldots, Y_{nk} + [0,\ h]F_n(A)), \ldots$$
$$\ldots, Y_{nk} + hF_n(Y_{1k} + [0,\ h]F_1(A), \ldots, Y_{nk} +$$
$$+ [0,\ h]F_n(A)))\} - (h^3/12)\Psi_k(Y_{1k} + [0,\ h]F_2(A), \ldots$$
$$\ldots, Y_{nk} + [0,\ h]F_n(A)).$$

Для $Y(x_i) = (Y_1(x_i), \ldots, Y_n(x_i))$ остается справедливой оценка, аналогичная (5), причем следует положить $\omega(Y) = \max\limits_k \omega(Y_k)$, $\xi = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где ξ_i таковы, что

$$Y_{i0} + \xi_i\left(F_i(A) + \left(h_0^2/12\right)\Psi_i(A)\right) \subset A_i.$$

Отметим, что приведенный метод путем введения новых переменных может быть распространен и на уравнения p-го порядка $[p > 1)$:

$$d^py/dx^p = f(x,\ y,\ dy/dx, \ldots, d^{p-1}/dx^{p-1}).$$

§ 2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ S-ГО ПОРЯДКА ТИПА РУНГЕ — КУТТА

Рассмотрим задачу Коши:

$$dy/dx = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \in Y_0. \tag{2}$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ определена для всех $(x, y) \in \Delta_x \times \Delta_y$, где $\Delta_x = \{x | 0 \leqslant x \leqslant c\}$, $\Delta_y = \{y | a \leqslant y \leqslant b\}$.

Кратко напомним способ получения решения методом Рунге — Кутта [41], так как ряд параметров, определяемых формулами этого метода, используется при построении соответствующих интервальных формул. Для нахождения $y(x+h)$, если известно $y(x)$, полагаем

$$y(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h),$$

где $k_1(h) = hf(x, y)$,

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h,\ y + \beta_{21} k_1(h)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_q(h) = hf(x + \alpha_q h,\quad y + \beta_{q1} k_1(h) + \ldots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h)),$$

а величины $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$, $p_1, \ldots, p_q$, β_{ij} $(0 < j < i \leqslant q)$ зависят от выбора s-го порядка погрешности, q и самой функции f.

Ниже мы всюду полагаем, что для $\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$ функция f гарантирует справедливость представления

$$\varphi(h) = \psi(x, y) h^{s+1} + O(h^{s+2}) = (\varphi^{(s+1)}(0) h^{s+1})/(s+1)! + (\varphi^{(s+2)}(\theta h) h^{s+2})/(s+2)!$$

и оценки

$$|\varphi^{(s+2)}(\theta h)/(s+2)!| \leqslant M < \infty$$

при всех $0 < h \leqslant h_0$ и $(x, y) \in \Delta_x \times \Delta_y$, где h_0 — некоторое фиксированное число.

Пусть функция $f(x, y)$ имеет интервальное расширение $F(X, Y)$, обладающее следующими свойствами: 1) $F(X, Y)$ определено и непрерывно для всех $X \subset \Delta_x$, $Y \subset \Delta_y$; 2) $F(X, Y)$ монотонно по включению, т. е. из $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ следует, что $F(X_1, Y_1) \subset F(X, Y)$; 3) существует постоянная $L > 0$ такая, что $\omega(F(X, Y)) \leqslant L(\omega(X) + \omega(Y))$ для всех $X \subset \Delta_x$, $Y \subset \Delta_y$, где $\omega([a, b]) = b - a$. Пусть, кроме того, $\psi(x, y)$ имеет интервальное расширение $\Psi(X, Y)$, определенное для всех $X \subset \Delta_x$, $Y \subset \Delta_y$ и монотонное по включению. Обозначим

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hF(X, Y), \\ k_2(h) &= hF(X + \alpha_2 h,\ Y + \beta_{21} k_1(h)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_q(h) &= hF(X + \alpha_q h,\ Y + \beta_{q1} k_1(h) + \ldots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h)), \\ Mh_0 &= \alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Будем считать числа $\xi_2 > 0, \ldots, \xi_q > 0$ такими, что

$$\begin{aligned} &Y_0 + \xi_2 \beta_{21} F(\Delta_x, \Delta_y) \subset \Delta_y, \\ &Y_0 + \xi_3 (\beta_{31} F(\Delta_x, \Delta_y) + \beta_{32} F(\Delta_x, \Delta_y)) \subset \Delta_y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Y_0 + \xi_q (\beta_{q1} F(\Delta_x, \Delta_y) + \ldots + \beta_{qq-1} F(\Delta_x, \Delta_y)) \subset \Delta_y, \end{aligned} \tag{4}$$

а ξ_0 — выбранным из условия

$$Y_0 + \xi_0 (p_1 F(\Delta_x, \Delta_y) + p_2 F(\Delta_x, \Delta_y) + \ldots + p_q F(\Delta_x, \Delta_y)) + (\Psi(\Delta_x, \Delta_y) + [-\alpha, \alpha]) h_0^s \subset \Delta_y, \tag{5}$$

причем интервал Y_0 лежит строго в Δ_y и $y_0 \in Y_0$. Положим

$$\xi^* = \min(\xi_0, \xi_2, \ldots, \xi_q) \tag{6}$$

и построим решение задач (1), (2) на отрезке $[0, \xi^*]$, который разобьем на части точками $x_j = jh$, $h = \xi^*/m$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ и выберем интервалы $X_j \subset [0, \xi^*]$ такие, что $x \in X_j$.

Далее положим

$$Y_m(x_0) = Y_m(0) = Y_0,$$

$$Y_m(x_{j+1}) = Y_m(x_j) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i^j(h) + (\Psi(X_j, Y_m(x_j)) + [-\alpha, \alpha]) h^{s+1}. \tag{7}$$

Здесь величины $k_i^j(h)$ вычисляются по формулам (3), в которых вместо X и Y берутся X_j и $Y_m(x_j)$ соответственно.

Условия (4), (5) гарантируют, что в процессе вычислений по формулам (7) не появятся интервалы, выходящие за область определения функций F и Ψ. Кроме того, нетрудно показать, что если $y(x)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $y(0) \in Y_0$, то $y(x_j) \in Y_m(x_j)$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Это можно сделать с помощью метода математической индукции.

Следующая теорема характеризует порядок точности расчетных формул (7).

Теорема. Если $Y_m(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ вычисляются по формулам (7), то справедлива оценка

$$\omega(Y_m(x_j)) \leqslant Ph^s + Q\omega(Y_0) + R \max_{l=1,\ldots,m} \omega(X_l), \qquad (8)$$

где P, Q, R — некоторые постоянные.

Доказательство. В силу сделанных предположений имеем

$$\omega(Y_m(x_{j+1})) = \omega(Y_m(x_j)) + \omega\left(\sum_{i=1}^{q} p_i k_i^j(h) + \right.$$

$$\left. + h^{s+1}\omega(\Psi(X_j, Y_m(x_j)) + [-\alpha, \alpha]\right) \leqslant \omega(Y_m(x_j)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} |p_i|\, \omega\left(k_i^j(h)\right) + h^{s+1}(\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha). \qquad (9)$$

Воспользовавшись свойством 3) функции F, получим

$$\omega\left(k_i^j(h)\right) \leqslant hL(\omega(X_j) + \omega(Y_m(x_j)))\cdot(1 + c_{i1}hL + \ldots$$

$$\ldots + c_{ii-1}(hL)^{i-1}). \qquad (10)$$

Коэффициенты c_{ir} $(r = 1, \ldots, i-1)$, используемые в (10), можно выразить с помощью рекуррентных соотношений, вытекающих из неравенств:

$$\omega(k_i(h)) \leqslant hL\left[\omega(X) + \omega(Y) + \sum_{r=1}^{i-1} |\beta_{ir}|\, \omega(k_r(h))\right] \leqslant$$

$$\leqslant hL[\omega(X) + \omega(Y)]\left\{1 + hL\sum_{r=1}^{i-1} |\beta_{ir}|\,[1 + c_{r1}hL + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + c_{rr}(hL)^{r-1}]\right\}.$$

При этом, по определению, полагаем $c_{11} = 0$. Теперь, используя (10), перепишем (9) так:

$$\omega(Y_m(x_{j+1})) \leqslant \omega(Y_m(x_j)) +$$

$$+ hL\sum_{i=1}^{q} |p_i|\,(\omega(X_j) + \omega(Y_m(x_j)))(1 + c_{i1}hL + \ldots$$

$$\ldots + c_{ii-1}(hL)^{i-1} + h^{s+1}[\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha] =$$

$$= \omega(Y_m(x_j))\left[1 + hL\sum_{i=1}^{q} |p_i|\,(1 + c_{i1}hL + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + c_{ii-1}(Lh)^{i-1}\right] + hL\omega(X_j)\sum_{i=1}^{q} |p_i|\,[1 + c_{i1}hL + \ldots$$

$$\ldots + c_{ii-1}(hL)^{i-1}] + h^{s+1}[\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha] \leqslant$$

$$< \omega(Y_m(x_j))(1 + Y_0 hL) + \gamma_0 hL\omega(X_j) +$$

$$+ h^{s+1}[\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha], \qquad (11)$$

где

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^{q} |p_i|\,[1 + c_{i1}h_0L + \ldots + c_{ii-1}(h_0L)^{i-1}].$$

Из (11) следует, что

$$\omega(Y_m(x_j)) \leqslant \omega(Y_m(x_0))(1 + \gamma_0 hL)^j +$$

$$+ \left\{\gamma_0 hL \max_{l=1,\ldots,m-1} \omega(X_l) + [\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha]\, h^{s+1}\right\}\times$$

$$\times\left[1 + (1 + \gamma_0 hL) + \ldots + (1 + \gamma_0 hL)^{j-1}\right] \leqslant \omega(Y_0)\, e^{\gamma_0 L\xi^*} +$$

$$+ \left(e^{\gamma_0 L\xi^*} - 1\right) \max_{l=1,\ldots,m-1} \omega(X_l) + [\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha]\times$$

$$\times\left(e^{\gamma_0 L\xi^*} - 1\right) h^s/\gamma_0 L.$$

Вводя обозначения

$$P = [\omega(\Psi(\Delta_x, \Delta_y)) + 2\alpha]\left(e^{\gamma_0 L\xi^*} - 1\right)/\gamma_0 L,$$

$$Q = \exp \gamma_0 L\xi^*, \quad R = Q - 1,$$

убеждаемся в справедливости (8).

Замечание 1. Во всех рассуждениях мы полагали $h = \mathrm{const}$. Но, как легко видеть, все результаты остаются справедливыми и в случае непостоянных $h_i = x_{i+1} - x_i$. Неравенство (8) будет выполнено, если в нем h заменить на $h^* = \max h_j$ $(j = 1, \ldots, m-1)$.

Замечание 2. Указанный метод построения интервального решения справедлив также для систем уравнений вида (1) с соответствующими начальными условиями.

§ 3. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ТИПА АДАМСА

Рассмотрим интервальный аналог метода Адамса. Будем искать решение задачи (1), (2) из § 2 в узлах x_i отрезка $[0, \xi]$, причем $x_i = ih$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $h = \xi/m$. Используя интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования назад и предполагая достаточную гладкость функции f, можем записать

$$y'(x_i + ht) = f_i + f^1_{i-1/2}t + \ldots + f^{n-1}_{i-(n-1)/2}(t(t+1)\ldots$$
$$\ldots(t+n-2))/(n-1)! + y^{(n+1)}(\gamma(t))\,t(t+1)\ldots$$
$$\ldots(t+(n-1))\,h^n/n!, \quad (1)$$

где

$$\gamma(t) \in [x_{i-n-1}, x_i], \quad t = (x - x_i)/h, \quad f_i = f(x_i, y(x_i)),$$
$$f^1_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i, \quad f^k_i = f^{k-1}_{i+1/2} - f^{k-1}_{i-1/2}.$$

Интегрируя (1) в пределах от x_i до x_{i+1}, имеем

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = h\Bigg(f_i \int_0^1 1\cdot dt + f^1_{i-1/2}\int_0^1 t\,dt + \ldots$$
$$\ldots + f^{n-1}_{i-(n-1)/2}\int_0^1 \{(t(t+1)\ldots(t+n-2))/(n-1)!\}\,dt +$$
$$+ \int_0^1 y^{(n+1)}(\gamma(t))\,\frac{t\ldots(t+(n-1))}{n!}\,h^n dt\Bigg).$$

В силу уравнения (1) $y^{(n+1)}(x)$ можно выразить через f и ее производные порядка не выше n. Обозначим это выражение через $\psi(x, y)$ и предположим, что оно не меняет знака в области определения. Тогда по теореме о среднем справедливы равенства

$$\int_0^1 y^{(n+1)}(\gamma(t))\,t(t+1)\ldots(t+n-1))\,h^n/n!\,dt =$$
$$= (h^n/n!)\,y^{(n+1)}(\eta)\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+n-1))\,dt =$$
$$= (h^n/n!)\,\psi(\eta, y(\eta))\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+n-1))\,dt,$$

где $\eta \in [x_{i-n+1}, x_i]$.

Пусть функции $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$ имеют интервальные расширения $F(X, Y)$ и $\Psi(X, Y)$ соответственно и относительно этих функций справедливы все уже сделанные предположения предыдущего параграфа.

Теперь можно предложить следующий путь конструирования интервального решения задачи (1), (2):

1) одним из известных интервальных методов (например, методом s-го порядка) находим интервалы $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ такие, что $y(x_k) \in Y_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, считая $y(0) \in Y_0$;

2) полагаем

$$Y_{i+1} = Y(x_{i+1}) = Y_i + h\big[F_i + F^1_{i-1/2}c_1 + \ldots$$
$$\ldots + F^{n-1}_{i-(n-1/2)}c_{n-1}\big] + \Psi(X_i + [-(n-1)h, 0],\ Y_i +$$
$$+ [-(n-1)h, 0]\,F(\Delta_x, \Delta_y))\,c_n h^{n+1}, \quad (2)$$

где $c_k = (1/k!)\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+k-1))\,dt$, а $F^j_{i-(n-1)/2}$ определяются как и в вещественном случае.

В силу сделанных предположений легко показать, что при всех $i = 0, 1, \ldots, m$ имеют место включение $y(x_i) \in Y_i$, а также справедливость оценки

$$\omega(Y_i) \leqslant A \max_{k=0,\ldots,n-1} \omega(Y_k) + B \max_{j=1,\ldots,m-1} \omega(X_j) + ch^n, \quad (3)$$

где константы A, B, C не зависят от h.

Обсудим вопрос об отрезке интегрирования $[0, \xi]$. Вообще говоря, можно было бы поступать так же, как и в § 2. Однако имеет смысл действовать иначе, а именно после вычисления очередного интервала Y_i проверять выполнение включений $Y_i \subset \Delta_y$, $Y_i + [-(n-1)h,\ 0]F(\Delta_x,\ \Delta_y) \subset \Delta_y$. Если при каком-то i хотя бы одно из них не выполнено, то счет на этом, естественно, прекращается. Разумеется, счет может быть окончен и раньше, если достигнуто желаемое значение для ξ. Такой способ выбора отрезка интегрирования применим и в случае метода s-го порядка из § 2.

В качестве примера рассмотрим методы 3-го и 4-го порядков, когда f не зависит явно от x, т. е. $f = f(y)$. Метод 3-го порядка записывается в виде

$$Y_{i+1} = Y_i + (h/12)[23F(Y_i) - 16F(Y_{i-1}) + 5F(Y_{i-2})] + \\ + (3/8)\Psi(Y_i + [-2h,\ 0]F(\Delta_y))h^4,$$

где $\Psi(Y)$ — интервальное расширение функции $\psi(y) = f(f')^3 + 4f^2f'f'' + f^3f'''$.

Для метода 4-го порядка получим выражение

$$Y_{i+1} = Y_i + (h/24)[55F(Y_i) - 59F(Y_{i-1}) + 37F(Y_{i-2}) - \\ - 9F(Y_{i-3}) + (251/720)\Psi(Y_i + [-3h,\ 0]F(\Delta_y))h^5,$$

где $\Psi(Y)$ — интервальное расширение функции $\psi(y) = f(f')^4 + 11f^2(f')^2f'' + 7f^3f'f''' + 4f^3(f'')^2 + f^4f^{(IV)}$.

Замечание 1. При выводе данных методов существенно использовался тот факт, что $\psi(x,\ y)$ не меняет знака во всей области определения. В случае, когда это условие не выполняется, можно выделить области постоянства знака функции $\psi(x,\ y)$ и затем использовать один из приводимых методов. В промежутках, где $\psi(x,\ y)$ меняет знак, остаточный член оценивается по максимуму модуля его значений в этом промежутке.

Замечание 2. Указанный метод построения интервального решения легко распространяется и на систему уравнений вида (2.1) с соответствующими начальными условиями.

§ 4. ИНТЕРВАЛЬНЫЙ МЕТОД, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ КВАДРАТУРНУЮ ФОРМУЛУ СИМПСОНА

Метод s-го порядка, рассмотренный в § 2, является довольно общим, но уже при $s \geqslant 4$, например, для

оценки величины $|\varphi^{(s+2)}(\theta h)|$ необходимо предварительно проделать довольно большой объем аналитических выкладок. Если мы имеем возможность проведения выкладок на ЭВМ, то, разумеется, метод можно реализовать для больших s.

Рассмотрим интервальный метод, использующий квадратурную формулу Симпсона, позволяющий в ряде случаев избежать больших аналитических выкладок. Для любой достаточно гладкой функции справедливо соотношение

$$\int_a^b g(x)\,dx = ((b-a)/6)\,(g(a) + 4g((a+b)/2) + \\ + g(b)) - g^{(\mathrm{IV})}(\eta)\,(b-a)^5/2880, \qquad (1)$$

где $\eta \in [a,\ b]$. Предполагая, что задача (1), (2) из § 2 решается на интервале $[0,\ \xi]$, который разбит на подынтервалы точками $x_i = ih$, $h = \xi/m$, $i = 1, \ldots, m$, из (1) получим

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = (h/6)\,[y'(x_i) + 4y'((x_i + x_{i+1})/2) + \\ + y'(x_{i+1})] - y^{(\mathrm{V})}(x_i + \theta h)\,h^5/2880 = (h/6)\Big[f(x_i, y(x_i)) + \\ + 4j\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),\ y\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\Big) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\Big] - \\ - \psi(x_i + \theta h,\ y(x_i + \theta h))\,h^5/2880 \\ (i = 0, 1, \ldots, m-1;\ x_0 = 0,\ x_m = \xi) \qquad (2)$$

где $\theta \in [x_i,\ x_{i+1}]$, $\psi(x,\ y)$ есть выражение $y^{(\mathrm{V})}(x)$, полученное в силу (1) из § 2.

Если $F(X,\ Y)$ и $\Psi(X,\ Y)$ — интервальные расширения функций $f(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y)$ с упомянутыми в § 2 свойствами, то мы можем построить интервальное решение следующим образом:

$$Y(0) = Y_0,$$

$$Y_{i+1} = Y(x_{i+1}) = Y_i + (h/6)[F(X_i,\ Y_i) + 4F((X_i + Y_i)/2, \\ \tilde{Y}((x_i + x_{i+1})/2)) + F(X_{i+1},\ \tilde{Y}(x_{i+1}))] - \Psi(X_i + \\ + [0,\ h]F(\Delta_x,\ \Delta_y))h^5/2880.$$

Величины $\tilde{Y}((x_i+x_{i+1})/2)$ и $\tilde{Y}(x_{i+1})$ вычисляются через X_i, X_{i+1} и Y_i одним из известных методов третьего порядка.

Нетрудно показать, что при указанных свойствах функций F и Ψ

$$y(x_i)\in Y_i \ (i=1,\ \ldots,\ m),$$

$$\omega(Y_i)\leqslant A\omega(Y_0)+B\max_i \omega(Y_j)+ch^4,$$

где постоянные A, B и C не зависят от h.

§ 5. МЕТОД МУРА

Рассмотрим задачу Коши

$$dy/dx=f(y(x)), \tag{1}$$

$$y(0)=y_0, \tag{2}$$

где функция f определена на интервале $A=[a,\ b]$ и $y_0\in(a,\ b)$.

Пусть функция $f(y)$ имеет интервальное расширение $F(Y)$, обладающее следующими свойствами: 1) $F(Y)$ определена и непрерывна при всех $Y\subset A$, 2) $F(Y)$ монотонна по включению, 3) существует число $l>0$ такое, что $\omega(F(Y))\leqslant l\omega(Y)$ для всех $Y\subset A$.

Так как $y_0\in(a,\ b)$, существует $h>0$ такое, что для $x\in[0,\ h]$

$$y_0+xF(A)\subset A. \tag{3}$$

Пусть p — положительное целое число. Разобьем интервал $[0,\ h]$ на подынтервалы $X_s=[(s-1)h/p,\ sh/p]$ $(s=1,\ \ldots,\ p)$.

Рассмотрим метод решения задачи (1), (2), допускающий неточно заданные начальные данные, т. е. предположим, что существует интервал Y_0 такой, что он лежит строго в A и $y_0\in Y_0$.

Для каждого положительного целого числа p мы определим интервально-значную функцию $Y_p(x)$ при $x\in[0,\ h]$ следующим образом: $Y_p(0)=y_0$ и при $x_s=sh/p$, $s=1,\ \ldots,\ p$, положим

$$Y_p(x_s)=Y_p(x_{s-1})+hF(Z_s), \tag{4}$$

где

$$Z_s=Y_p(x_{s-1})+[0,\ h/p]F(A). \tag{5}$$

Для $x_{s-1}<x<x_s$ положим

$$Y_p(x)=Y_p(x_{s-1})+(x-x_{s-1})F(Z_s). \tag{6}$$

Заметим, что $x_s-x_{s-1}=h/p$ и, следовательно, уравнения (4)—(6) вместе с условием $Y_p(0)=y_0$ определяют кусочно-линейную, непрерывную интервально-значную функцию $Y_p(x)$ для всех $x\in[0,\ h]$.

Теорема. Задача Коши (1), (2) при условии, что функция f имеет интервальное расширение, удовлетворяющее условиям 1)—3), имеет единственное решение $y(x)$ для $x\in[0,\ h]$, где h определяется условием (3) и $y(x)\in Y_p(x)$ для всех $p=1,\ 2,\ \ldots$ и, кроме того, существует $l_1>0$ такое, что для всех $x\in[0,\ h]$

$$\omega(Y_p(x))\leqslant l_1(1/p). \tag{7}$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} Y_p(x)$ определяет вещественную функцию, удовлетворяющую уравнению (1), причем единственность следует из свойства 3). Предварительно покажем, что имеет место неравенство (7). Из (6) следует, что

$$\omega(Y_p(x))\leqslant\omega(Y_p(x_{s-1}))+(x-x_{s-1})\omega(F(z_s)). \tag{8}$$

Используя равенство (5) и свойство 3), получим

$$\omega(F(Z_s))\leqslant l\{\omega(Y_p(x_{s-1}))+3h|F(A)|/p\}, \tag{9}$$

при этом используется тот факт, что для любых интервалов I_1, I_2 имеют место неравенства $\omega(I_1I_2)\leqslant|I_1|\omega(I_2)+|I_2|\omega(I_1)$, $\omega(I_1)\leqslant 2|I_1|$, где $|[a,\ b]|=\max(|a|,\ |b|)$. Из (8) и (9) индукцией по s найдем, что для $x\in[0,\ h]$

$$\omega(Y_p(x))\leqslant\{1+(1+hl/p)+\ldots+(1+hl/p)^{p-1}\}\times$$
$$\times 3lh^2|F(A)|/p^2\leqslant[((1+hl/p)^p-1)/((1+hl/p)-1)]\times$$
$$\times 3lh^2|F(A)|/p^2.$$

Так как $(1+hl/p)^p<\exp hl$, то

$$\omega(Y_p(x))\leqslant 3h|F(A)|(\exp hl-1)/p. \tag{10}$$

Отсюда и следует (7).

Чтобы показать, что множество $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} Y_p(x)$ не пусто, покажем, что $Y_p(x)\subset A$ для $p=1,\ 2,\ \ldots$ и всех $x\in[0,\ h]$ и что пересечение $Y_{p_1}(x)\cap Y_{p_2}(x)$ не пусто для любой пары целых чисел $p_1,\ p_2 \geqslant 1$. Семейство интервалов $\{Y_p(x)\}$ обладает свойством конечного пересечения, т. е. пересечение любого конечного числа членов не пусто. Так как A — компакт, множество $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} Y_p(x)$ не пусто.

Из определения (3) для h и соотношений (4)—(6) по индукции следует, что $Z_s \subset A$ для всех $s = 1, \ldots, p$ и $Y_p(x) \subset A$ для всех $x \in [0,\ h]$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $x \in [0,\ h]$ означает включение $Y_{mp}(x) \subset Y_p(x)$ для любого положительного целого числа m. Тогда для двух целых чисел $p_1,\ p_2 \geqslant 1$ имеем

$$Y_{p_1p_2}(x) \subset Y_{p_1}(x), \quad Y_{p_1p_2}(x) \subset Y_{p_2}(x),$$

и так как $Y_p(x)$ не пусто для всех $p \geqslant 1$, пересечение $Y_{p_1}(x) \cap Y_{p_2}(x)$, содержащее $Y_{p_1p_2}(x)$, не пусто.

Таким образом, множество $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} Y_p(x)$ не пусто, а неравенство (10) означает, что это множество имеет нулевую ширину для $x \in [0,\ h]$ и, следовательно, определяет вещественную функцию $y(x) = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} Y_p(x)$.

Чтобы показать, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1), заметим, что из свойства (1) о непрерывности функций следует непрерывность $Y_p(x)$ для каждого p. Так как $y(x) \in Y_p(x)$ и $f(y) \in F(y)$, то

$$\int\limits_{[0,x]} f(y)\,dt \in \int\limits_{[0,x]} F(Y_p(t))\,dt. \tag{11}$$

Из (5) и (6) следует, что $Y_p(x) \subset Z_s$ для $x \in [x_{s-1},\ x_s]$ и

$$y_0 + \int\limits_{[0,x]} F(Y_p(t))\,dt \in Y_p(x). \tag{12}$$

Из (11) и (12) имеем $y_0 + \int\limits_{[0,x]} f(y(t))\,dt \in Y_p(x)$ для $p = 1,\ 2, \ldots$ и поэтому

$$y_0 + \int\limits_{[0,x]} f(y(t))\,dt = y(x) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Y_p(x). \tag{13}$$

Тогда уравнение $y(x) = y_0 + \int\limits_{[0,x]} f(y(t))\,dt$ означает, что y удовлетворяет уравнению (1).

Докажем единственность. Предположим, что имеем два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда из (13) получим

$$\int\limits_{[0,x]} (f(y_1(t)) - f(y_2(t)))\,dt = y_1(x) - y_2(x). \tag{14}$$

Так как условие 3) означает, что $|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant l|y_1 - y_2|$, то (14) не выполняется для $y_1(x) \neq y_2(x)$, если $xl < 1$. Повторяя это для каждого шага $1/l$, мы получим единственность для $x \in [0,\ h]$. Теорема доказана.

Для того чтобы продолжить интервальное решение $Y_p(x)$ вне отрезка $[0,\ h]$, поступают следующим образом. Вычислив $Y_p(x)$, найдем интервал B такой, что $Y_p(x)$ лежит внутри B и определена функция $F(B)$. Тогда из (3) определим новое h, заменяя y_0 на $Y_p(h)$ в качестве новых данных и заменяя A на B. Тогда формулы (4)—(6) можно применять к новому интервалу значений и неравенство (10) примет вид

$$\omega(Y_p(x)) \leqslant 3h|F(A)|(\exp hl - 1)/p + \omega(y_0)\exp hl,$$

$$\omega(y_0) \geqslant 0.$$

Таким образом, (7) будет верно, пока $\omega(y_0) \leqslant l_2/p$ для некоторого $l_2 > 0$, которое не зависит от p. Поэтому интервальное решение $Y_p(x)$ можно последовательно продолжить на интервалы $[0,\ h_1]$, $h_1 + [0,\ h_2] h_1 + h_2 + [0,\ h_3], \ldots$, пока найдутся интервалы $A_1,\ A_2, \ldots$ такие, что интервалы $Y_p\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{r} h_\alpha\right)$ лежат внутри A_{r+1}.

Формулы (3)—(6) вместе с процедурой продолжения, описанной выше, определяют метод первого порядка для интервального решения задачи Коши, принадлежащий Муру. Заметим, что указанный метод можно использовать и тогда, когда начальное значение задачи Коши есть невырожденный интервал Y_0, $\omega(Y_0) > 0$. В этом случае интервальное решение $Y_p(x)$ будет содержать каждое вещественное решение $y(x)$, отвечающее каждому $y_0 \in Y_0$.

В качестве упражнения читателю предлагается показать самостоятельно, что в этом случае $\omega(Y_p(x)) \leqslant l_1/p + l_2\omega(Y_0)$, где постоянные l_1 и l_2 не зависят от p, но зависят от области изменения x.

Заметим также, что получаемое интервальное решение $Y_p(x)$ содержит точное решение задачи Коши (1), (2) для всех x из интервалов $[0, h_1]$, $[h_1, h_2]$, $[h_2, h_3]$, ...

Легко конструируется метод Мура k-порядка. Пусть $y(x)$ имеет непрерывные производные до порядка k включительно. Тогда по теореме Тейлора

$$y(x) = y(0) + \sum_{i=1}^{k-1} (f^{(i-1)}/i!)\, x^i + \\ + (f^{(k-1)}(y(\theta))/k!)\, x^k, \qquad \theta \in [0, h].$$

Если интервальные расширения $F^{(i)}$ функций $f^{(i)}$ определены для интервала A и $y(0) \in Y(0) \in A$, то $y(x) \in \in Y(x)$, где

$$Y(x) = Y_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(F^{(i-1)}(Y(0))\, x^i\right)/i! + F^{(k-1)}(A)\, x^k/k! \tag{15}$$

при условии, что $Y([0, h]) \subset A$. Считая, что $\omega(F^{(i)}(Y)) \leqslant L_i \omega(Y)$, получим

$$\omega(Y(x)) \leqslant L_{k-1}\omega(A)\, h^k/k! + \left\{1 + \sum_{i=1}^{k-1} L_{i-1} h^i/i!\right\} \omega(Y(0)).$$

Вместо разбиения интервала $[0, h]$, как в методе первого порядка, используется другая методика: h и A выбираются из (15) так, чтобы ширина интервала $Y(x)$ была наименьшей. Указанный метод обобщается на случай системы уравнений.

§ 6. МЕТОД КРУКЕБЕРГА

Трехшаговый метод Крукеберга [42] численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет получить интервалы, содержащие решения исходной задачи. В нем предварительно строится интервальное решение для фиксированной вещественной задачи с некоторыми начальными значениями из заданного множества (интервала), а затем методом возмущений находятся интервальные включения для всевозможных решений.

Пусть уравнение первого порядка

$$dy/dx = f(x, y) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

имеет единственное решение $\tilde{y}(x;\ x_0,\ y_0)$ на $[x_0, x_1]$. Если начальные данные заданы неточно, т. е. $y_0 \in Y_0$, где Y_0 — некоторый интервал в $\dot{R}$, то решения задачи (1), (2) в такой постановке образуют некоторое множество $\bar{Y}(x) = \{z \mid z = \tilde{y}(x;\ x_0,\ y_0),\ y_0 \in Y_0\}$. Требуется найти интервал $Y_1^* \supseteq \bar{Y}_1$, где $\bar{Y}_1 = \bar{Y}(x_1)$, $x_1 = x_0 + h$, величина шага h определяется в процессе алгоритма. Кратко опишем каждый из этапов метода. На первом из них находим шаг h и интервальный полином k-й степени $P_k(x - x_0)$ такой, что при $x_1 = x_0 + h$, $P_k(x - x_0) \supseteq \bar{Y}(x)$, $x \in [x_0, x_1]$. Для этого можно использовать метод Мура, который позволяет получать полином нулевой степени $P_0(x - x_0) \supseteq \bar{Y}$, $x \in [x_0, x_1]$. Полиномы более высокой степени могут быть получены по итерационному алгоритму Пикара

$$P_{k+1} = Y_0 + \int_0^x F(x_0 + \xi)\, d\xi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где F — интервальное расширение функции f. На практике ограничиваются полиномами нулевой степени p_0.

На втором этапе находится интервальное решение уравнения (1) с вещественными начальными данными $y(x_0) = d_0 \in Y_0$. Применяя формулу Тейлора, в которой вещественные аргументы заменены интервальными, имеем интервал

$$D_1 = d_0 + hF(x_0, d_0) + \frac{h^2}{2!} F'([x_0, x_1], P_0([0, h])).$$

Ясно, что $d_1 = \tilde{y}(x_1;\ x_0,\ d_0) \in D_1$.

Третий этап представляет интервальный вариант метода возмущений. Интервал $U_0 = Y_0 - d_0$ — множество всевозможных возмущений начального значения d_0. Перепишем исходную задачу в виде

$$d(u + d)/dx = f(x;\ u + d), \\ u(x_0) = u_0 \in U_0. \tag{3}$$

Нам известно, что $u(x_1)=d_1=\tilde{y}(x_1;\ x_0,\ d_0)$, требуется определить $u_1=\tilde{y}(x_1;\ x_0,\ u_0)$. Разлагая правую часть по формуле Тейлора в окрестности решения $\tilde{y}(x_1;\ x_0,\ d_0)=d_1$ и удерживая члены первого порядка относительно h, имеем уравнение

$$du/dx = u\ \partial f/\partial y \qquad (4)$$

с начальными условиями (3). Тогда интервал $U_1=QU_0$, где $Q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\Gamma^k$, $F=F^{(1)}$ — интервальное расширение функции f'_y, есть искомое интервальное решение задачи (4), (3). Очевидно, что $U_1+D_1 \supseteq Y_1$. Метод Крукеберга естественным образом обобщается на случай системы уравнений, при этом $\partial f/\partial y$ будет матрицей, компоненты которой являются интервальными расширениями функций $\partial f_i/\partial y_j$.

Методы Мура и Крукеберга успешно применялись для решения задач, но они являются альтернированными, что значительно затрудняет их практическую реализацию.

§ 7. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Многие интервальные алгоритмы построены для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Метод Хансена [43] представляет интервальный аналог конечно-разностного подхода к решению дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу

$$d^2y/dx^2=f(x,\ y,\ dy/dx), \qquad (1)$$

$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_n.$$

Предположим, что на интервале $[a,\ b]$ задача имеет единственное решение, четырежды непрерывно дифференцируемое. Разобьем интервал $[a,\ b]$ на частичные интервалы $X_i=[x_i,\ x_{i+1}]$, где $x_0=a$, $x_n=b$, и запишем в каждой внутренней точке x_i конечно-разностные аппроксимации для производных, входящих в уравнения, учитывая при этом ошибки аппроксимации. Имеем

$$y'_i=(y_{i+1}-y_i)/2h-(h^2/6)\,y'''(\xi_i)/6,$$
$$y''_i=(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2-h^2y^{(IV)}(\eta_i)/12,$$
$$\xi_i,\ \eta_i\in X_i^*=X_i\cup X_{i-1}=[x_{i-1},x_i] \quad (i=1,\ldots,n-1).$$

Априорные оценки ошибок аппроксимации позволяют построить интервалы, содержащие их. Будем считать, что $y'''(\xi_i)\in A_i$, $y^{(IV)}(\eta_i)\in B_i$ для $\xi_i,\ \eta_i\in X_i^*$. Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, найдем

$$\begin{aligned}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2-h^2B_i/12=\\ =f(x_i,y_i,(y_{i+1}-y_{i-1})/2h-h^3A_i/6).\end{aligned} \qquad (2)$$

Поскольку величины y_0 и y_n известны, полученную систему из $(n-1)$ уравнений с $(n-1)$ неизвестными можно решить каким-либо интервальным методом в зависимости от того, линейная или нелинейная функция $f(x,\ y)$. Таким образом, найдем интервалы y_i^I: $y_i\in y_i^I$ $(i=1,\ldots,n-1)$. Весь алгоритм можно записать как последовательное выполнение отдельных этапов, т. е. некоторый итерационный метод.

1. Задаем приближенно значения интервалов Y_i, Y'_i таких, что $y(x)\in Y_i$, $y'(x)\in Y'_i$ при $x\in X_i$.

2. Из уравнения (1) дифференцированием вычисляем

$$y'''=f_x+y'f_y+y''f_{y'}=p(x,y,y'),\quad y^{(IV)}=q(x,y,y').$$

Затем, заменяя вещественные аргументы интервалами, получаем

$$A_i=p(X_i,Y_i,Y'_i)\cup p(X_{i-1},Y_{i-1},Y'_{i-1}),$$
$$B_i=q(X_i,Y_i,Y'_i)\cup q(X_{i-1},Y_{i-1},Y'_{i-1}).$$

3. Решаем систему алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами (2), находим интервалы y_i^I.

4. Уточняем величины интервалов Y_i', используя формулы

$$y'(x) = (y_{i+1} - y_i)/h + [(x_{i+1} - x)^2 y''(\theta_i) - (x - x_i)^2 y''(\Phi_i)]/2h,$$

$$y''(\theta_i),\ y''(\Phi_i) \in Y_i'' = f(X_i, Y_i, Y_i')$$

$$y'(x) \in (Y_{i+1}^{\mathrm{I}} - Y_i^{\mathrm{I}})/h + \{(x_{i+1} - X_i)^2 Y_i'' + (X_i - x_i)^2 Y_i''\}/2h = (Y_{i+1}^{\mathrm{I}} - Y_i^{\mathrm{I}})/h + h\{[0, 1]^2 Y_i'' - [0, 1]^2 Y_i''\}/2 = (Y_{i+1}^{\mathrm{I}} - Y_i^{\mathrm{I}})/h + h\omega\{[0, 1] Y_i''\}[-1, 1]/2 = Y_i'.$$

5. Полученные значения Y_i' позволяют найти улучшенные значения Y_i:

$$y(x) \in \frac{1}{2}[Y_i^{\mathrm{I}} + Y_{i+1}^{\mathrm{I}} + (x_{i+1} - X_i) Y_i' - (X_i - x_i) Y_i'] = (Y_i^{\mathrm{I}} + Y_{i+1}^{\mathrm{I}})/2 + h([0, 1] Y_i' - [0, 1] Y_i')/2 = Y_i. \quad (3)$$

Окончательно в качестве Y_i берем пересечение ранее заданных и полученных из (3) Y_i.

Затем этот вычислительный процесс продолжается до тех пор, пока значения интервалов с двух соседних этапов не становятся достаточно близкими.

Начальные интервалы Y_i и Y_i' выбираются в виде

$$Y_i = \{y(a) + y(b)\}/2 + [-u, u],\quad Y_i' = (y(b) - y(a))/(b - a) + [-v, v].$$

Вычисленные же их значения можно записать как

$$Y_i = [p_i, q_i] + c_i[-u, u] + d_i[-v, v] = [y_i^L, y_i^R],$$
$$Y_i' = [p_i', q_i'] + c_i'[-u, u] + d_i'[-v, v] = [y_i^{1L}, y_i^{1R}].$$

Для того чтобы итерационный процесс сходился, необходимо выполнение условий $\Delta y_i^L > 0$, $\Delta y_i^R < 0$, $\Delta y_i^{1L} > 0$, $\Delta y_i^{R1} < 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Эти ограничения позволяют найти связь между переменными u, v и известными величинами.

2. В работе Оливейры [44] предложено два интервальных метода для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями: первый из них представляет интервальный вариант метода факторизации; второй — метод типа корректор, базирующийся на описанном выше методе Хансена.

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) = f(x),\quad x \in [a, b] \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = \gamma_1,$$
$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2. \quad (5)$$

Предположим, что $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции и такие, что $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant q > 0$, α_i, $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i + \beta_i \neq 0$, $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$. Тогда решение задачи (4), (5) существует и единственно.

Дифференциальный оператор второго порядка можно представить в факторизованном виде, т. е. как произведение двух дифференциальных операторов первого порядка. Тогда решение краевой задачи сводится к последовательному решению трех задач с начальными данными. Существенно отличаются два случая

1) $\alpha_1 > 0$. Тогда система принимает вид

а) $\varphi'(x) + \varphi^2(x)/p(x) = q(x)$,
$\varphi(a) = \beta_1 p(a)/\alpha_1$,

б) $z'(x) = (\varphi(x)/p(x))z(x) = f(x)$,
$z(a) = \gamma_1 p(a)/\alpha_1$,

в) $y'(x) - (\varphi(x)/p(x))y(x) = z(x)/p(x)$,
$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2$;

2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

а) $\psi'(x) + q(x)\psi^2(x) = 1/p(x)$,
$\psi(a) = 0$,

б) $u'(x) + q(x)\psi(x)u(x) = f(x)\psi(x)$,
$u(a) = \gamma_1/\beta_1$,

в) $\psi(x)y'(x) - y(x)/p(x) = u(x)/p(x)$,
$y(b) = \gamma_2/\beta_1$.

В любом случае задача в) решается при изменении аргумента от b до a, этого требуют условия устойчивости.

Задачи а), б), в) разрешимы, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно оценить снизу. Для $\psi(x)$ положительная нижняя граница $\Psi = \sqrt{1/Q_0 p_0}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sqrt{Q_0/p_0}$ для $x \in [a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, $p_0 \geqslant p(x)$, $Q_0 \geqslant q(x)$. Для $\varphi(x)$ нижняя граница $\Phi = \sqrt{p_0 q_0}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sqrt{q_0/p_0}$ на $[a, b]$, если $\varphi(a) > 0$; $\Phi = \sqrt{p_0 q_0}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\sqrt{q_0/p_0}$ на $[a+\varepsilon, b]$, если $\varphi(a) = 0$.

Для решения задач с начальными данными применимы многие интервальные методы, например методы Мура, трехшаговый метод Крукеберга.

Рассмотрим случай 2), ибо случай 1) можно реализовать аналогично. Разобьем интервал $[a, b]$ на n частичных интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $h_i = x_{i+1} - x_i$ и предположим, что, применяя какой-либо интервальный метод, мы построили интервалы Ψ_i такие, что $\psi(x_i) \in \Psi_i$, $x_i \in [a, b]$ и $\psi(x) \in \Psi_i = [\psi_{i1}, \psi_{i2}]$ для всех $x \in (x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Тогда можно найти интервалы $A_i = [a_{i1}, a_{i2}]$, содержащие $\psi(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Для этого достаточно положить $a_{i1} = \min(\psi_{i-11}, \psi_{i1}, \Psi)$, $a_{i2} = \max(\psi_{i-12}, \psi_{i2})$, где Ψ — положительная нижняя граница, найденная выше. Перепишем уравнение б) в следующем виде:

$$u'(x) \in [f(x) - q(x)u(x)]A_1,$$
$$u(a) = \gamma_1/\beta_1, \quad x \in [a, x_1];$$
$$u'(x) \in [f(x) - q(x)u(x)]A_{i+1},$$
$$u(x_i) \in U_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Интервальное решение $(i-1)$-го уравнения для x_{i-1} служит интервалом, содержащим начальные значения для i-го уравнения, $i = 1, \ldots, n$. Последовательно решая n дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами, находим интервалы

$$U_0 = [u(a), u(a)],\ U_j = [u_{j1}, u_{j2}]\ (j = 1, \ldots, n'+1),$$
$$x_{n'+1} \equiv x_{n+1} = b,\ u(x_j) \in U_j,\ x_j \in [a, b],\ u(x) \in U_j,$$
$$x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Каждые два соседних интервала U_{j-1}, U_j позволяют сконструировать новый интервал $B_j = (b_{j1}, b_{j2})$, где $b_{j1} = \min(u_{j-1,1}, u_{j1})$, $b_{j2} = \max(u_{j-1,2}, u_{j2})$, $j = 1, \ldots, n'+1$, n', вообще говоря, не равно n. Множества B_j, A_j используем при записи задачи в) в следующем виде:

$$y'(x) \in [y(x) + B_{n'+1}]/p(x)A_{n+1}, \qquad x \in [x_m, b],$$
$$y(b) = \gamma_2/\beta_2, \qquad m = \max(n, n'), \tag{6}$$

$$y'(x) \in [y(x) + B_j]/p(x)A_j,\ x \in [x_{j-1}, x_j],$$
$$y(x_j) \in Y_j \quad (j = m, m-1, \ldots, 1). \tag{7}$$

Как и прежде, интервальные решения задачи (6) для x_m служат начальными данными для первого из уравнений (7), а решения задачи (7) для x_j — начальными данными для $(j-1)$ уравнения в (7).

Полученные интервалы Y_j будут приближенными решениями поставленной задачи в том смысле, что $y(x_i) \in Y_i = [y_{i1}, y_{i2}]$, $x_i \in [a, b]$. Величины y_{i1}, y_{i2} являются соответственно нижней и верхней границами для точного решения на i-частичном интервале.

Подставляя в (7) вместо $y(x)$ найденные значения Y_i, найдем интервалы C_j, содержащие производную $y'(x)$ для $x \in [x_j, x_{j+1}]$.

Второй из методов представляет модификацию метода Хансена. Пусть задано дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y, y')$ с граничными условиями $y(a) = \gamma_1$, $y(b) = \gamma_2$. Предположим, что поставленная задача имеет единственное решение на $[a, b]$, а y''' и $y^{(IV)}$ существуют и ограничены. Обозначим через $F(x, y, y')$ интервальное расширение функции $f(x, y, y')$ и запишем разностную аппроксимацию для второй производной

$$y_i'' = h^{-2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - h^2 y^{(IV)}(\theta_i)/12,$$

где $y_i'' = y''(x_i)$, $\quad \theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $h = x_i - x_{i-1} = \mathrm{const}$. Учитывая, что $y^{(IV)}(x_i) \in R(x, y, y')$, где R — интервальное расширение функции $r(x, y, y')$, полученной из уравнения двукратным дифференцированием, а для $\theta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}] y^{(IV)}(\theta_i) \in A_i = R([x_{i-1}, x_{i+1}], y_i, y_i')$, найдем

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \in \frac{h^4}{12}A_i + h^2 F(x_i, y_i, y_i'),$$
$$i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$
$$y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2, \quad x_0 = a, \quad x_{n+1} = b.$$

Оливейра предложил решать систему алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами (8) следующим образом. Будем рассматривать не всю систему, а последовательно по два уравнения. Имеем

$$Y_i = A^{-1}B_i, \quad Y_i = \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} [-2/3] & [-1/3] \\ [-1/3] & [-2/3] \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -y_{i-1} + h^4A_i/12 + h^2F(x_i, y_i, y_i') \\ -y_{i+2} + h^4A_{i+1}/12 + h^2F(x_{i+1}, y_{i+1}, y_{i+1}') \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Находя в каждый момент времени по два значения y_i, мы получим определенные преимущества. Во-первых, решение выписывается сразу в явном виде, не прибегая к интервальному обращению матрицы высокого порядка. Во-вторых, при этом происходит корректировка значений при переходе к следующей паре уравнений и использовании при этом более точного значения y_i, входящего в B_i.

Далее, каждая компонента y_i интервального вектора определяется при помощи не более чем двух интервальных умножений, в методе же Хансена число их может достигать $(n-1)$ и служить поэтому источником дополнительной погрешности. Для полученных интервалов Y_i справедливы включения $y(x_i) \in Y_i$, $x_i \in [a, b]$, где $y(x)$ — точное решение исходной задачи.

§ 8. МЕТОДЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Методы интервального анализа могут быть использованы при решении уравнений в частных производных. Рассмотрим решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в D, $u = f$ на δ, интервально-аналитическим методом Тоста [45]. Здесь D — прямоугольник в плоскости (x, y), δ — его граница, f — непрерывная на D функция. Если эту задачу решать методом сеток на пятиточечном шаблоне, то возникает необходимость в решении больших систем алгебраических уравнений. Ясно, что для получения решения с гарантированным включением необходимо учитывать ошибки аппроксимации и ошибки округлений при решении системы алгебраических уравнений.

Интервально-аналитические методы позволяют учитывать локальные ошибки аппроксимации и возникающие в процессе численного решения ошибки округлений так, что в точках сетки можно получить локальные границы решения, т. е. для каждой точки $(x, y) \in D$, являющейся точкой сетки, всякий раз получается интервал $\mathcal{Y}$ такой, что $u(x, y) \in \mathcal{Y}$. Покажем как это сделать.

Пусть замкнутый прямоугольник $\bar{D}$ покрыт прямоугольной сеткой с шагами h_1 и h_2 по осям x и y соответственно. Если производные, входящие в уравнение $\Delta u = 0$, заменить, используя ряд Тейлора, разностными отношениями, то в некоторой точке будем иметь

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \{u(x_0 - h_1, y_0) + u(x_0 + h_1, y_0) - $$
$$- 2u(x_0, y_0)\}/h_1^2 - h_1^2\left\{\frac{\partial^4 u(x_0 + \rho_1, y_0)}{\partial x^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u(x_0 - \rho_2, y_0)}{\partial x^4}\right\}\Big/24,$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \{u(x_0, y_0 + h) + u(x_0, y_0 - h) - $$
$$- 2u(x_0, y_0)\}/h_2^2 - h_2^2\left\{\frac{\partial^4 u(x_0, y_0 + \rho_3)}{\partial y^4} + \right.$$
$$\left. \frac{\partial^4 u(x_0, y_0 - \rho_4)}{\partial y^4}\right\}\Big/24, \quad 0 \leqslant \rho_1, \ \rho_2 \leqslant h_1, \ 0 \leqslant \rho_3, \ \rho_4 \leqslant h_2.$$

Так как в точке $(x_0, y_0) \in D$ функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, имеем равенство

$$h_2^2\{u(x_0 - h_1, y_0) + u(x_0 + h_1, y_0) - 2u(x_0, y_0)\}/h_1^2 +$$
$$+ \{u(x_0, y_0 - h_2) + u(x_0, y_0 + h_2) - 2u(x_0, y_0)\} -$$
$$- h_1^2h_2^2\left\{\frac{\partial^4 u(x_0 + \rho_1, y_0)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x_0 - \rho_2, y_0)}{\partial x^4}\right\}\Big/24 -$$
$$- h_2^4\left\{\frac{\partial^4 u(x_0, y_0 + \rho_3)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u(x_0, y_0 - \rho_4)}{\partial y^4}\right\}\Big/24 = 0.$$

Возникающая при этом система уравнений имеет вид

$$Au = b + d, \qquad (1)$$

где A — трехдиагональная блочная матрица, u — вектор, компоненты которого есть искомые значения решения в точках сетки, b — вектор, компоненты которого состоят из значений заданной граничной функции, d — вектор, компоненты которого учитывают ошибки аппроксимации. Эти ошибки в точке области состоят из слагаемых, которые пропорциональны четвертым частным производным по неизвестным промежуточным точкам. Если имеются оценки этих производных по всей области, то можно оценить и ошибки аппроксимации по всей области. Для решения поставленной задачи, а также задачи Дирихле для уравнения Пуассона имеются оценки, зависящие от максимума и минимума граничной функции и минимального расстояния соответствующей точки до границы. Мы не будем конкретно рассматривать эти оценки, а только заметим, что с использованием их из (1) получается система интервальных уравнений

$$Au = I, \qquad (2)$$

где правая часть I состоит из интервальных величин, включающих погрешности. Система уравнений (2) решается обращением матрицы в интервально-арифметическом исчислении на ЭВМ. Метод обращения базируется на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть S_k — полином Чебышева второго рода и $A = (A_{ij})$ — блочная матрица с элементами

$$A_{ij} = \begin{cases} B \text{ при } i = j \quad (i, j = 1, \ldots, n), \\ E \text{ при } i - j = 1, \\ \theta \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

где E — единичная матрица порядка $m \times m$, Θ, B — нулевая и ненулевая матрицы порядка $m \times m$. Тогда

1) $A^{-1} = (Z_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где $Z_{ij} = [S_n(B)]^{-1} \times S_{i-1}(B) S_{n-j}(B)$ при $i \leqslant j$, $Z_{ij} = Z_{ji} = Z_{n+1-i,\, n+1-j}$;

2) $\|A^{-1}\| = \max \|[S_n(B)]^{-1} [S_n(B) - S_{n-k}(B) - S_{k-1}(B)] \times [B - 2E]^{-1}\|$;

3) $B = B^* \Rightarrow Z_{ij} = Z^*_{ji}$;

4) если B симметрична относительно главной диагонали, то Z_{ij} симметрична.

В случае уравнения Лапласа, рассматриваемого в прямоугольнике, Тсст показал справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Если в системе уравнений (2) матрица A удовлетворяет первому условию теоремы 1 и $B = QDQ$, где D — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы B, и Q — матрица, ортогональная собственным векторам матрицы B, то $A^{-1} = (Z_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $Z_{ij} = Q[S_n(D)]^{-1} S_{i-1}(D) \times S_{n-j}(D) Q$ и

$$\|A^{-1}\| = \frac{2}{m+1} \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} g_{2k-1} (-1)^{k+1} \times \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{2(m+1)},$$

где g_k — функция от собственных значений B вида $g_k = (1 - 1/\cos((n+1)\theta_k(2)))/(d_k - 2)$, $2\cos\theta_k = d_k$, d_k — собственные значения B.

Предлагаемое в теореме правило вычисления A^{-1} и нахождения через A^{-1} решения системы интервальных уравнений имеет следующие преимущества. Во-первых, обращение A сводится к обращению матриц более низкого порядка, так что этот процесс подходит для ЭВМ с малой рабочей памятью и магнитными барабанами в качестве внешнего запоминающего устройства. Использованием структурных свойств исходной матрицы можно ограничить время вычислений и объем требуемой памяти. Во-вторых, процесс обращения для выбранного шага проводится лишь единожды. При изменении граничных условий всякий раз можно использовать ранее полученную обратную матрицу, поскольку для решения задачи необходимо лишь дополнительно умножить матрицу на вектор.

2. Построение интервальных методов для решения уравнений с частными производными сопряжено с рядом трудностей нахождения удовлетворительных оценок на ширину получаемых интервалов.

В работах [46, 47] удалось построить интервально-аналитический метод для решения задач с начальными данными для обыкновенных дифференциальных уравнений и задачи Гурса для гиперболического уравнения с помощью некоторого итерационного метода, базирующегося на принципе неподвижной точки и перенесенного на случай интервальных пространств.

Пусть задано уравнение

$$\partial^2 u(x, y)/\partial x \partial y = f(x, y, u(x, y)) \tag{3}$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \ u(0, y) = \varphi_2(y), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \tag{4}$$

причем функции φ_1 и φ_2 непрерывно дифференцируемы в $[0, b]$. Предположим, что нам известно приближенное решение v этой задачи. Тогда возникает задача оценки близости этого приближенного решения к точному решению z задачи (1), (2).

Функция погрешности $e = z - v$ зависит как от аппроксимации исходной задачи некоторой приближенной для нахождения v, так и от ошибок машинной реализации арифметических операций. Поэтому будем искать интервальную функцию $H(x, y)$ такую, что

$$e(x, y) \in H(x, y), \quad z = v + e \in v + H. \tag{5}$$

Обозначим через $CC_n(A)$ множество всех непрерывных интервально-значных функций, определенных на множестве $A = [a, b] \times [c, d] \subset R^2$, которое может быть метризовано с помощью метрики $rr_n : CC_n(A) \times CC_n(A) \to R^+$,

$$rr_n(u, v) = \sup_{(x,y) \in A} ((\exp(-\alpha(|x-a| + |y-c|)) \times \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \max_{i=1,2} |u_{ik}(x, y) - v_{ik}(x, y)|).$$

Полагая далее $n = 1$, получим

$$DDe(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 e(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = DDz^*(t_1, t_2) - DDu(t_1, t_2) = f(t_1, t_2, z^*(t_1, t_2)) - f(t_1, t_2, u(t_1, t_2)) + d(t_1, t_2),$$

$$d(t_1, t_2) = f(t_1, t_2, u(t_1, t_2)) - DDu(t_1, t_2).$$

Разлагая в ряд Тейлора по переменной $z = v + e$, имеем

$$DDe(t_1, t_2) = f_z(t_1, t_2, u(t_1, t_2))e(t_1, t_2) + f_{zz}(t_1, t_2, u(t_1, t_2) + \nu e(t_1, t_2))e^2(t_1, t_2)/2 + d(t_1, t_2), \quad \nu \in [0, 1].$$

Будем считать $A = [0, b] \times [0, b]$ и сформулируем следующие условия: 1) для задачи (1), (2) существует функция Y из $CC(A)$, определяемая непрерывно дифференцируемыми граничными функциями y_1 и y_2, такая, что частные производные f по z, f_z и f_{zz} непрерывны в

$$D_0(Y) = \{(t_1, t_2, z(t_1, t_2)) | (t_1, t_2) \in A, \ z(t_1, t_2) \in Y(t_1, t_2)\},$$

где $D(A)$ — множество всех дифференцируемых на A вещественных функций, графики которых лежат в $D_0(Y)$; 2) на $[0, b]$ заданы непрерывно дифференцируемые функции x, y, $u \in D(A)$ (причем функция u является приближенным решением задачи (1), (2)), а также интервальные функции G, H и D, удовлетворяющие свойствам:

(i0) $I_1(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} G(s_1, t_2)\, ds_1, \quad I_1(0, t_2) = [0, 0],$

$$I_2(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} G(t_1, s_2)\, ds_2, \quad I_2(t_1, 0) = [0, 0],$$

$$I_{12}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} G(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2,$$

$$\frac{\partial e(t_1, 0)}{\partial t_1} \in \frac{dx(t_1)}{dt_1} - \frac{\partial u(t_1, 0)}{\partial t_1} + I_1(0, t_2),$$

$$\frac{\partial e(0, t_2)}{\partial t_2} \in \frac{dy(t_2)}{dt_2} - \frac{\partial u(0, t_2)}{\partial t_2} + I_2(t_1, 0);$$

(i1) $H(t_1, t_2) = x(t_1) - u(t_1, 0) + y(t_2) - u(0, t_2) - y_0 + u_0 + I_{12}(t_1, t_2)$;

(i2) $f(t_1, t_2, u(t_1, t_2)) - DDu(t_1, t_2) \in D(t_1, t_2)$;

(i3) для $LH(t_1, t_2) = f_z(t_1, t_2, u(t_1, t_2))H(t_1, t_2) +$

$+F_{zz}(t_1, t_2, u+[0, 1]H)H^2(t_1, t_2)/2+D(t_1, t_2)$ выполняется соотношение $LH(t_1, t_2)\subset G(t_1, t_2)$;

(i4) $u(t_1, t_2)+[0, 1]H(t_1, t_2)\subset Y(t_1, t_2)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1), 2), тогда для решения z^* задачи (1), (2) справедливо $e(t_1, t_2)\in H(t_1, t_2)$,

$$\frac{\partial e(t_1, t_2)}{\partial t_1}\in\frac{\partial x(t_1)}{\partial t_1}-\frac{\partial u(t_1, 0)}{\partial t_1}+I_2(t_1, t_2),$$

$$\frac{\partial e(t_1, t_2)}{\partial t_2}\in\frac{dy(t_1)}{dt_2}-\frac{\partial u(0, t_2)}{\partial t_2}+I_1(t_1, t_2).$$

Заметим, что при формулировке условия (i3) мы использовали обозначение F_{zz} для интервального расширения функции f_{zz}.

Доказательство этого утверждения может быть получено при рассмотрении интегрального уравнения

$$e(t_1, t_2)=e(0, 0)+\frac{\partial e(t_1, 0)}{\partial t_1}+\frac{\partial e(0, t_2)}{\partial t_2}+$$
$$+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\{f_z e(t_1, t_2)+f_{zz}(t_1, t_2, u+\nu e(t_1, t_2))\,e^2(t_1, t_2)/2+$$
$$+d(t_1, t_2)\}\,dt_1dt_2,$$

которому удовлетворяет функция ошибки $e(t_1, t_2)=z^*(t_1, t_2)-u(t_1, t_2)$.

Опишем кратко итерационный процесс, предлагаемый в [47]. Пусть выполняются все условия теоремы 3. Обозначим через H_0 некоторую функцию, которая включает в себя $e(t_1, t_2)$: $H_0\supset e(t_1, t_2)$ и M — множество всех таких функций, $H\subset H_0$. Далее предположим, что существует константа $k>0$, удовлетворяющая неравенству $rr(LH_1, LH_2)\leqslant krr(H_1, H_2)$, $H_1, H_2\in A$. Тогда оператор $T: M\to M\subset CC(A)$, определенный следующим образом:

$$TH(t_1, t_2)=x(t_1)-u(t_1, 0)+y(t_2)-u(0, t_2)-y_0+$$
$$+u_0+\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}LH(s_1, s_2)\,ds_1ds_2,$$

имеет неподвижную точку $H^*: TH^*=H^*$.

Условие $k<1$ здесь отсутствует, поскольку мы можем выбрать константу α при определении метрики так, что $k/\alpha<1$. Последовательность интервальных функций будет монотонной по включению, т. е. $H_{n+1}(t_1, t_2)\subset H_n(t_1, t_2)$ для всех $(t_1, t_2)\in A$, причем сходящейся в метрике rr линейно: $rr(H_{n+1}, H^*)=$ $=rr(TH_n, TH^*)\leqslant krr(H_n, H^*)/\alpha$. Здесь $H_{n+1}=TH_n$, H_0 задано.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗНАЧНЫХ $\mathscr{L}$-СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим нахождение интервальной функции, содержащей точное решение $u=u(x)$ следующей задачи:

$$Lu=f(x, u),\quad x\in[0, 1], \tag{1}$$

$$D^k u(0)=D^k u(1)=0,\quad 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{2}$$

где

$$Lu=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j D^j\{p_j(x)D^j u\},\quad m\geqslant 1,\ D^j=\frac{d^j}{dx^j},\quad p_j(x)>0,$$

в предположении, что функции $P_j(x)$ и $f(x, u)$ известны не точно, а заданы некоторые интервально-значные функции P_j и F такие, что $p_j\in P_j$, $f\in F$.

На примере задачи (1), (2) покажем, как метод приближения интервально-значных функций элементами $S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$ (т. е. элементами пространства интервально-значных $\mathscr{L}$-сплайнов) может быть применен для получения интервальных решений. В качестве конечномерного подпространства в методе Галеркина [34] возьмем пространство $\mathscr{L}$-сплайнов. Тогда нахождение «приближенного» решения задачи (1), (2) сведется к определению коэффициентов базисных сплайнов из $S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$, т. е. нахождению некоторого интервального вектора $B=(B_1, \ldots, B_m)$.

Действительно, пусть мы выбрали базисные сплайны $S_k(x)\in S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$ $(k=1, \ldots, n)$. В силу однородности начальных условий решение будем искать в виде

$$u(x;B)=\sum_{k=1}^{n} B_k S_k(x).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x;B)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_k P_j(x) \mid D^j S_k(x) - F(x, u(x,B)).$$

Если $U(x; B)$ — точное решение задачи (1), (2), то

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_k P_j(x) D^j S_k(x) \ominus F(x, U(x;B)) = [0, 0],$$

где операция $\ominus$ означает вычитание в R^2. Другими словами, для любых $p_j(x) \in P_j(x)$ и $f \in F$ найдется такой вектор $b \in B$, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_k p_j(x) \operatorname{Rs} D^j S_k(x) - f\left(x, \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{Rs} S_k(x)\right) = 0,$$

т. е. невязки становятся минимальными. Учитывая это, по аналогии с вещественным случаем, когда приближенное решение ищется методом Галеркина, нам необходимо определить интервальный вектор B такой, что

$$B=\left\{b=(b_1,\ldots,b_n)\,\middle|\,\int_0^1 \operatorname{Rs} S_l(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_k p_j(x) \operatorname{Rs}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times (D^j S_k(x)) - f\left(x, \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{Rs} S_k(x)\right)\right) dx = 0\ (l=1,\ldots,n)\right\}.$$

Пусть $\Phi'(x; A)$ есть формальная производная от $\Phi(x; A)$. Тогда формально определенный интеграл от $\Phi'(x; A)$ на промежутке $[a, b]$ определим правилом

$$\int_a^b \Phi'(x,A)\,dx = \Phi(x,A)\Big|_a^b = \Phi(b;A)-\Phi(a;A).$$

Очевидно, что, формально интегрируя в уравнениях

$$\int_0^1 S_l(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_k P_j(x) D^i S_k(x) - \right.$$
$$\left. - F\left(x; \sum_{k=1}^{n} B_k S_k(x)\right)\right) dx = 0 \quad (l=1,\ldots,n), \quad (3)$$

мы получим систему уравнений для определения B.

Последние уравнения, вообще говоря, «некорректны», поскольку легко доказывается следующее утверждение: линейная комбинация интервальных чисел, хотя бы одно из которых невырожденно, не может быть действительным числом. Поэтому вместо (3) справедливо написать

$$\int_0^1 S_l(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_k P_j(x) D^j S_k(x) - \right.$$
$$\left. - F\left(x; \sum_{k=1}^{n} B_k S_k(x)\right)\right) dx = [\varepsilon_1^l, \varepsilon_2^l],$$

где $0 \in [\varepsilon_1^l, \varepsilon_2^l]$.

Пусть решение последней системы есть $B_\varepsilon = B_\varepsilon([\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1], [\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2], \ldots, [\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n])$. Очевидно, что, устремив $\max_i \max(|\varepsilon_1^i|, |\varepsilon_2^i|)$ к нулю, получим искомый вектор B.

Для нахождения интервального решения, гарантированно содержащего точное решение, необходимо дополнительно учесть ошибки аппроксимации. Последнее требует наличия априорных оценок на решение задачи (1), (2).

Лемма. Если в задаче (1), (2) $f(x, u)=f(x)>0$, то $u \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть на $[c, d] \subset [0, 1]$ функция отрицательна. Выберем функцию $\overline{W}(x) \in W_2^m[0, 1]$ такую, что:

1) $\int_0^1 \overline{W}(x) f(x)\,dx < 0,$

2) $D^j\overline{W}(x) D^j u(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$.

Этим требованиям можно удовлетворить, положив $\overline{W}(x)=u(x)$ на $[c, d]$, $\overline{W}(x)=\varepsilon_1 u(x)$ на $[0, \xi_1]$, где $\varepsilon_1>0$, $\xi_1<c$, $\overline{W}(x)=\varepsilon_2 u(x)$ на $[\xi_2, 1]$, где $\xi_2>d$, $\varepsilon_2>0$, а на отрезках $[\xi_1, c]$ и $[\xi_2, 1]$ за $\overline{W}(x)$ можно принять соответствующий интерполяционный полином

Эрмита. Тогда в силу произвольности ε_1 и ε_2

$$\int_0^1 Lu(x)\overline{W}(x)\,dx = \int_0^1 \overline{W}(x) f(x)\,dx < 0,$$

но

$$\int_0^1 Lu(x)\overline{W}(x)\,dx = \int_0^1 \sum_j p_j(x)\left(D^j u(x) D^j \overline{W}(x)\right) dx > 0,$$

поскольку $p_j(x) > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. Пусть $\psi(x)$ есть классическое решение задачи

$$Lu(x) = 1, \tag{4}$$

$$D^k u(0) = D^k u(b) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1,$$

$$\rho \geqslant \|\psi\|_{L_\infty},\quad M = \sup_{x\in[0,1]}\{f(x,0)\},\quad -\frac{\partial f}{\partial u} \geqslant \gamma > -\frac{1}{\rho}. \tag{5}$$

Тогда, если $\varphi(x)$ — классическое решение задачи (1), (2),

$$\|\varphi\|_{L_\infty} \leqslant M\rho/(1+\gamma\rho). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\gamma = 0$. Так как согласно лемме $\psi(x) > 0$, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $W_\varepsilon = (M+\varepsilon)\psi(x) - \varphi(x) > 0$. Предположим противное: пусть $W_\varepsilon = (M+\varepsilon)\psi(x) - \varphi(x) < 0$. Тогда $LW_\varepsilon = M + \varepsilon - f(x, \varphi(x))$, откуда $LW_\varepsilon \geqslant \varepsilon$ и в силу леммы $W_\varepsilon \geqslant 0$. Следовательно, $\varphi(x) \leqslant M\rho$. Аналогично получается оценка снизу $\varphi(x) \geqslant -M\rho$.

Если $\gamma < 0$, то следующее уравнение

$$Lu = f(x, u) - \gamma u + \gamma\varphi(x) \tag{7}$$

с краевыми условиями (5) имеет то же решение $\varphi(x)$. Поскольку для этой задачи $\gamma^* = 0$, получаем оценку (6). Теперь, используя (6), оценим u в норме $W_2^m[0,1]$. Для этого умножим равенство

$$\sum_{j=1}^m (-1)^j D^j\left(p_j(x) D^j u\right) = f(x,u)$$

на $u(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1. Имеем $\int_0^1 \sum_j p_j \times (D^j u)^2\,dx = \int_0^1 f(x,u)\,u\,dx$ и

$$\sigma\|u\|_{W_2^m[0,1]} = \int_0^1 \left[\sigma \sum_j (D^j u)^2 + u^2\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 [f(x,u) + u]\,u\,dx,$$

где $\sigma = \min\limits_{j=1,\dots,m} \inf\limits_{x\in[0,1]} p_j(x)$. Интеграл $\int_0^1 [f(x,u)+u]\,u\,dx$ можно оценить, используя оценку (6).

По теореме 4.2 из работы [34] с использованием полученной оценки строим интервальное решение

$$U(x) = \sum_{i=1}^n B_i S_j(x) + [-1, 1]\,K\|u\|_{W_2^m[0,1]}$$

где $S_j(x) \in S_p^I(\mathscr{L}, \Delta, z)$, K — некоторая вещественная константа, точнее, константа вложения. В силу построения при любых $p_j(x) \in P_j(x)$ и $f \in F$ справедливо включение $u(x) \in U(x)$.

Глава IV

ПРОБЛЕМА РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ НА ЭВМ

В настоящей главе мы остановимся на вопросах реализации интервальных операций на ЭВМ, построения пакетов программ интервальных алгоритмов и тесно примыкающего к ним вопроса транспортабельности программ. С конкретными алгоритмами машинной интервальной арифметики для ЭВМ БЭСМ-6 можно познакомиться в работах [14, 15].

§ 1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ПАКЕТА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

1. Создание пакетов программ для решения широкого круга задач науки и техники является в настоящее время одной из актуальных проблем вычислительной математики. В основе таких пакетов лежит модульная структура [48, 49]. В настоящем параграфе мы остановимся на принципах, которые могут быть заложены в основу создания пакета интервальных операций.

2. Как мы уже отмечали, интервальные методы возникли как средство автоматического учета ошибок округления в вычислительных процессах. Применение интервальных методов позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они заданы не точно, с некоторой погрешностью. При этом в полученные интервалы включаются и встречающиеся в процессе вычислений ошибки округлений. Основным элементом в интервальном исчислении является интервал $[a, b]$, определяемый как множество вещественных чисел $x : \{x | x \in R, a \leqslant x \leqslant b\}$. При задании числа x в ЭВМ в виде машинного числа $x_M = fb^e$ допускается, вообще говоря, погрешность относительно исходного числа x. Величина относительной погрешности $|x - x_M|/|x|$ обычно не превосходит единицы последнего разряда мантиссы x_M, что приводит к абсолютной погрешности $(^1/_2)b^{e-p}$, или b^{e-p}, в зависимости от того, округление или усечение последнего разряда дробной части производится для рассматриваемого типа ЭВМ. В терминах интервального анализа это означает, что число x, введенное в машину в форме $x_M = f \cdot b^e$, в действительности принадлежит интервалу $[f \cdot b^e - b^{e-p}, f \cdot b^e + b^{e-p}]$, а относительная погрешность при записи машинного числа — интервалу $[b^{-p}, b^{1-p}]$.

Используя для решения некоторой поставленной задачи интервальный алгоритм, можно получить интервальную функцию, содержащую ее точное решение. При этом достигается автоматический учет точности полученного решения и возможен априорный анализ влияния ошибок округления.

Интервальный анализ, безусловно, можно рассматривать как эффективный метод решения задачи контроля за погрешностями машинных операций, а следовательно, и транспортабельности программ. Проблема транспортабельности или непосредственного переноса программы, созданной для одной ЭВМ, на различные ЭВМ связана с тем, что машинно-независимый алгоритм задачи при реализации порождает множество машинно-зависимых алгоритмов, определяющихся особенностями каждой вычислительной машины, в том числе параметрами и формой записи чисел, а также относительной точностью выполнения машинных операций.

Главным препятствием на пути использования интервального анализа являются неприспособленность математического обеспечения современных ЭВМ, отсутствие как в алгоритмических языках высокого уровня, так и в трансляторах для них средств, учитывающих специфические требования интервального исчисления. Учитывая это, хорошим вариантом реализации интервальных методов на ЭВМ может служить пакет интервальных операций. Известен ряд работ по созданию машинной реализации интервальных операций, например развитая система Триплекс-Алгол [50], программы интервальных арифметических операций на БЭСМ-6 [14, 15], пакет интервальной арифметики [51, 52]. Возникает задача создания интервального пакета для отечественных ЭВМ.

3. Опишем основные принципы, которые могут быть заложены в основу при создании пакета интервальных операций на языке Фортран для реализации на ЭВМ БЭСМ-6. Целесообразно конструировать пакет как комплекс взаимосвязанных программ-модулей, реализующих некоторые законченные фрагменты выполнения операций над интервальными выражениями. По характеру взаимодействия между собой, модули образуют иерархическую структуру, где вхождение в более низкий уровень означает возможность вызова подпрограммой с высшего уровня. Первый ее уровень включает в себя модули для вычисления выражений, составленных из результатов операций как над действительными числами, так и над интервальными, например $\sin([a, b]) + 6[a, b] \times [c, d]$. Эти модули вызывают подпрограммы, реализующие машинные операции над числами, заданными в нормализованной

форме с плавающей запятой. Модули, вычисляющие значения элементарных функций с достаточно высокой точностью, не вносящей при переводе или округлении полученных значений в формат, принятый для представления границ интервалов, дополнительную погрешность, могут быть вызваны с любого расположенного выше уровня. Для успешной реализации интервального пакета желательно иметь в составе его элементов блок, подобный в некотором смысле «транслятору с языка интервального исчисления», на язык Фортран, что позволило бы вводить новые типы переменных, в частности INTERVAL. Мы в дальнейшем будем полагать, что включение интервального пакета в основную программу — задача пользователя, который решает, какие модули и в каком порядке он вызывает.

Важным вопросом при формировании пакета является определение форматов задания данных, модулей, осуществляющих ввод и обращение между различными типами данных. Предполагается использовать в пакете описания REAL, INTEGER и DOUBLE PRECISION; интервальные числа будут рассматриваться как действительные массивы длины 2, описание — DIMENSION.

Модуль, осуществляющий перевод чисел, заданных в спецификациях REAL или INTEGER, в интервальные числа, существенно зависит от способа округления. Реализации и исследованию свойств операции округления посвящены работы [53, 54], мы будем использовать приведенные там обозначения.

Отображение $\varphi: R \to M$, где M — множество машинно-представимых чисел, называется *округлением*, если $\varphi(x) = x$ для $x \in M$.

Возможны следующие типы округлений: монотонное, направленное вниз округление — $\varphi(x) \equiv \nabla x \leqslant x$, монотонное, направленное вверх округление — $\varphi(x) \equiv \Delta x \geqslant x$ либо округление, учитывающее параметры системы счисления —

$$\psi(x) \equiv \Box_\mu x = \begin{cases} 0, & x \in [0, b^{e_1-1}), \\ \nabla x, & x \in [\nabla x, s_\mu(x)], \quad x \in [b^{e_1-1}, B], \\ \Delta x, & x \in [s_\mu(x), \Delta x], \quad x \in [b^{e_1-1}, B], \end{cases}$$

где $s_\mu(x) = \nabla x + \frac{\Delta x - \nabla x}{b} \cdot \mu \quad (\mu = 1, \ldots, b-1)$,

b — основание системы счисления, e_1 — минимальный машинный порядок показателя степени, B — максимальное машинное число. В случае, если b — четное число, то $\Box b/2$ означает округление к ближайшему числу и $\Box b/2 = (\Delta x - \nabla x)/2$. Введенные функции обладают многими интересными свойствами и требуют дальнейшего изучения, но мы не будем касаться этого вопроса.

Очевидно использование функций округления в модуле перевода действительных чисел в интервальные: $x \to X = [\nabla x, \Delta x]$, $x \in R$. Подпрограммы ввода наряду с обычными содержащимися в Фортране операторами ввода будут включать и приведенную выше операцию.

Операции, которые следует реализовать в пакете, можно разбить на такие группы: арифметические операции, операции вычисления значения элементарных функций, специальные интервальные операции, операции перевода данных с разными спецификациями.

В число реализуемых интервальных операций включены: функция расстояния $\max\{|A_1 - A_2|, |B_1 - B_2|\}$, длины $|B - A|$, полудлины $|B - A|/2$, $\max_{x \in \mathbf{x}} |x|$, $\min_{x \in \mathbf{x}} |x|$, $\sqrt{\max |x| \cdot \min |x|}$, ширины интервала $(|A| + |B|)/2$, арифметические интервальные операции, логические операции, проверяющие справедливость отношений, вводимых над интервалами.

Вычисление областей значения элементарных функций на ЭВМ имеет большое значение, поскольку любая программа содержит нахождение таких областей, а аргументы, как уже упоминалось, могут быть заданы лишь приближенно. В [5, 18, 55] разработана методика нахождения областей значения рациональных интервальных функций путем разбиения области определения на подобласти и выделения там их экстремальных значений.

В численном анализе основными методами для вычисления элементарных функций на ЭВМ являются следующие: степенного разложения, многочленного и рационального приближения, разложения в цепные дроби и итерационные процессы. Поскольку наиболее нас интересуют методы, не зависящие от способа представления чисел в ЭВМ, целесообразно применять итерационные методы:

Точность, полученная от реализации пакета, достигается при правильном определении операций с машинными числами. В связи с этим упомянем о важном требовании к пакету — свойстве транспортабельности. Для того чтобы добиться гибкости пакета, следует размещать модули, зависящие от разрядности ЭВМ, так, чтобы их можно было легко заменить. К их числу относятся блоки ввода чисел и обращения между различными типами данных.

§ 2. ЗАДАЧА ТРАНСПОРТАБЕЛЬНОСТИ

1. Проблема транспортабельности программ в последнее время привлекла внимание математиков, занимающихся численным анализом. Это связано с тем, что численный метод решения задачи, не зависящий от параметров какой-либо ЭВМ, при его реализации порождает множество машинно-зависимых алгоритмов, определяющихся особенностями каждой вычислительной машины. Стандартные подпрограммы для арифметических операций над числами с плавающей запятой, когда их пишут на машинном языке, в очень большой степени зависят от конкретной машины и используют присущие ей значения параметров вычислительной среды. Ограниченность множества чисел, которые могут быть записаны в памяти ЭВМ, а вследствие этого неизбежное появление ошибок выполнения арифметических операций и выход за границы области машинных чисел, т. е. переполнение либо наличие машинного нуля, усложняют задачу реализации программы на различных ЭВМ.

2. Для координации действий в области транспортабельности в рамках IFIP (International Federation of Information Processes) создана специальная рабочая группа, на рассмотрение которой внесены различные проекты, касающиеся способов записи чисел, определения машинных арифметических операций и округления их результатов. Можно выделить различные подходы к созданию транспортабельных программ. Однако общим для них является введение параметров или иных средств, позволяющих проводить не только априорный анализ точности, но и автоматический

контроль за ошибками выполнения машинных операций.

3. Необходимость учитывать относительную точность выполнения машинных операций для каждой ЭВМ приводит многих математиков к мысли об изменении способа записи чисел и определении новых функций в алгоритмических языках. Как следствие этого введены новые параметры в записи машинных чисел и функции, характеризующие точность машинных операций.

При нормализованном представлении чисел с плавающей запятой

$$x = fb^e = \pm(f_1 b^{-1} + \ldots + f_p b^{-p})b^e,$$

$$f_1 = 1, \ldots, b-1; \; f_i = 0, \ldots, b-1 \;\; (i = 2, \ldots, p) \tag{1}$$

ЭВМ каждого типа характеризуется своими значениями следующих параметров: $b \geqslant 2$ — основание системы счисления; $p \geqslant 2$ — число разрядов, отводящихся под запись мантиссы; $e_{\max} > 0$ — максимальный показатель степени в записи машинных чисел; $e_{\min} < 0$ — минимальный показатель степени. Из (1) легко видеть, что при изменении мантиссы на единицу последнего разряда само число изменяется на величину b^{e-p}. Учитывая очевидное неравенство $b^{-1} \leqslant |f| < 1$, для относительной погрешности $|b^{e-p}|/|fb^e| = \Delta_x$ числа x получаем оценку $b^{-p} < \Delta_x \leqslant b^{1-p}$.

Можно ввести в качестве параметров при записи машинных чисел величины; $\varepsilon = b^{1-p}$ — максимальная относительная погрешность, $\sigma = b^{e_{\min}-1}$ — минимальное положительное число; $\lambda = b^{e_{\max}}\left(1 - b^{-p}\right)$ — максимальное число. Эти параметры существенно характеризуют процесс реализации численных методов. Например, если в результате вычислений получается число, меньшее σ, то оно заменяется нулем и относительная погрешность резко возрастает.

Для определения показателя степени и дробной части машинных чисел служат функции exponent (x), fraction (x), обратную задачу, т. е. конструирование по заданным величинам — показателю степени и дробной части самого числа, выполняет функция synthesize(x): = fraction$(x)b^e$. Чтобы оценить реальную точность вычислительного алгоритма, используются следующие функции: функция абсолютной погрешности

$$\alpha(x) = \begin{cases} b^{e-p}, & |x| \geqslant \sigma/\varepsilon, \\ \sigma, & |x| < \sigma/\varepsilon \end{cases}$$

и функция, характеризующая относительную погрешность: $\rho(x) = b^{-p}/|f|$, $x \neq 0$. Более удобной при вычислениях является $\beta(x) = 1/\rho(x)$.

Простейший пример использования этих функций дает следующая условная схема итерационного процесса:

$$\begin{cases} x := x_0, \\ \text{выполнять } \{\delta := \Phi(x),\ x := x + \delta\}, \text{ пока } |\delta| \leqslant k\alpha(x). \end{cases}$$

Здесь δ представляет разность между значениями вычисляемой величины на двух итерационных слоях, а условие $|\delta| \leqslant k\alpha(x)$ позволяет учитывать ошибки округления. При этом полагают, что ошибка выполнения каждой арифметической операции на ЭВМ определяется лишь значением последнего разряда мантиссы, этот факт используется при построении функции $\alpha(x)$. Однако, как замечено в работе [56], для большинства ЭВМ ошибка больше, чем объясняется необходимостью экономии оборудования в арифметическом устройстве, повышения быстродействия ЭВМ. Поэтому ясно, что функция $\alpha(x)$ не всегда дает реальную оценку ошибок округления, так как она ориентирована на величину погрешности, не превосходящей b^{1-p}. Прямой метод анализа ошибок по каждой операции не всегда надежен по причине, что операции обычно не являются независимыми. Это означает, что ошибки имеют тенденцию компенсировать или усиливать друг друга необычным образом.

4. Кроме введения функций, характеризующих точность, в решении проблемы транспортабельности существует методика использования различных форматов записи чисел. На многих ЭВМ в качестве основной формы записи чисел принята уже упоминаемая нами нормализованная форма записи $x = fb^e$, причем в записи мантиссы f значение старшего разряда отлично от нуля.

Стратегию нормализации всех чисел с плавающей запятой можно оценивать по-разному: с одной стороны, как дающую возможность получить минимальные погрешности, достижимые для данной степени точности (т. е. для количества разрядов, отводимых под запись числа); а с другой — как потенциально «опасную» в том смысле, что имеется тенденция выдавать результаты за более точные, чем они есть на самом деле. Когда мы, нормализуя результат операции $10^1 \times 0{,}31428571 - 10^1 \cdot 0{,}31415927$, получаем $10^{-2} \cdot 0{,}12644000$, мы теряем информацию о максимальной степени точности последней величины. Такая информация сохранилась бы, если бы мы оставляли ответ в виде $10^1 \cdot 0{,}00012644$.

Точность выполнения машинных операций существенно зависит от количества разрядов, отводимых под запись чисел, но очевидна невозможность ее улучшения в этом направлении без существенного возрастания затрат. Например, в стандарт выполнения арифметических операций включены следующие типы точности: простая и двойная с длиной ячеек, отводимых под запись чисел, 32-го и 64-го разряда соответственно, оперирующие с нормализованными числами, и расширенная простая, и расширенная двойная, оперирующие с ненормализованными числами. Общая форма записи чисел во всех этих форматах $x = (-1)^s 2^E F$, где s — признак знака числа, E — показатель степени, F — мантисса.

Для ненормализованных чисел в отличие от нормализованной формы значение старшего разряда мантиссы может равняться нулю. Можно охарактеризовать подробно свойства этих форматов, но мы ограничимся констатацией факта, что расширенная точность при одинаковом числе используемых разрядов позволяет представить в машине существенно более широкий диапазон чисел по сравнению с простой точностью. Однако арифметике ненормализованных чисел присущи нежелательные свойства. Например, при сложении приблизительно равных малых величин указываемая этой арифметикой точность не соответствует действительной.

Расширение диапазона машинно-представимых чисел частично устраняет появление переполнения или машинного нуля. Например, если $e_{\max} = 126$, то число $z = 2^{-130} \cdot 1{,}01101\ldots$ уже не может быть записано в ЭВМ, но после денормализации получаем $2^{-126} \times \times 0{,}000101\ldots$

5. Устранению или предотвращению переполнения в ЭВМ служат так называемые нечисловые символы для обозначения чисел, выходящих за область машинно-представимых. Мы можем считать, что при переполнении разрядных ячеек получаем $+\infty$, $-\infty$, и вопрос сводится к введению над ними разумным образом операций. При аппроксимации действительных чисел машинными следует действовать таким образом, чтобы получить наиболее полную систему аксиом множества машинных чисел. При этом особую роль приобретает определение округления как отображение поля действительных чисел в его некоторое подмножество, удовлетворяющее определенным свойствам. Многие интересные аспекты такого подхода показаны в [54].

6. Рассматривая транспортабельность программ как следствие автоматического учета оценки погрешности, нельзя не отметить возможность использования для этой же цели интервального исчисления. Возникнув как средство получения верхних и нижних оценок вычисляемых величин, интервальный анализ в настоящее время представляет достаточно полную математическую систему, допускающую аксиоматизацию и служащую эффективным методом численного анализа.

Очевидны преимущества интервальных методов для оценки точности вычислительных алгоритмов. Как и для обычных методов, для интервальных вводятся понятия сходимости и аппроксимации, но здесь ошибки округления уже учитываются при конструировании алгоритма и в случае сходимости метода не требуют дополнительного исследования. Важным фактом является и то, что использование интервальных чисел позволяет формализовать исследование реального вычислительного процесса в отличие от полуэмпирического подхода к вычислениям в машинной арифметике в настоящее время.

Приведем простой, но достаточно убедительный пример. Пусть требуется вычислить значение функции

$$y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - 3x > 0, \\ 0, & \text{если } 1 - 3x \leqslant 0. \end{cases}$$

Положим $x = 1/3$, тогда $y(x) = 0$. Но для многих ЭВМ вычисление $y(x)$ будет производиться так:

$$1 - 3 \cdot (1/3) = 1 - 3(0{,}33\ldots3) = 0{,}00\ldots01 > 0,$$

поэтому $y(1/3) = 1$.

Перейдем к интервальным числам: $1 - 3[0{,}33\ldots33, 0{,}33\ldots34] = [-0{,}00\ldots02;\ 0{,}00\ldots01]$. Заметим, что $[a, b] > 0 \leftrightarrow a > 0$. В этом случае значение $y(1/3) = 0$, что совпадает с ее теоретическим значением. Для проведения эффективных исследований сложных алгоритмов с помощью интервального анализа требуется дальнейшее его развитие, выяснение алгебраической структуры, топологических свойств, перенесения ряда результатов из действительного анализа.

С этим неразрывно связана задача машинной реализации интервальных алгоритмов, создание пакетов программ, реализующих интервальные операции, принципы построения которых расссмотрены в предыдущем параграфе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bierbaum F. Intervall-mathematik eine Literaturübersicht. Universitat Karlsruhe, I. B. N 74/12, 1974.
2. Bierbaum F. Intervall-mathematik eine Literaturübersicht. Universitat Karlsruhe, I. B. N 75/3, 1975.
3. Bierbaum F. Intervall-mathematik eine Literaturübersicht. Universitat Karlsruhe, I. B. N 76/4, 1976.
4. Bierbaum F. A bibliography on Intervall-Mathematics.— J. Comp. Appl. Math., 1978, v. 4, N 1, p. 59—86.
5. Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Представимость интервально-значных функций вещественными граничными функциями.— Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1973, т. 4, № 5.
6. Добронец Б. С., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Задача интерполяции интервального анализа.— Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1975, вып. 31.
7. Юлдашев З. Х. О двустороннем методе решения интервальных уравнений.— Материалы пятой научной конференции по математике и механике, Томск. 1975, ч. 1.
8. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Об интервально-аналитическом методе второго порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1976, № 3.
9. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Некоторые интервальные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1976, т. 7, № 6.
10. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. К решению обыкновенных дифференциальных уравнений интервальными методами.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 6.
11. Калмыков С. А. К задаче нахождения собственных значений симметрической матрицы интервальным методом.— Численный анализ, Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1978.
12. Юлдашев З. Х. Корректировка границ интервалов в машинной интервальной арифметике с привлечением исходных операндов.— Численный анализ, Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1978.
13. Назиров Ш. А., Юлдашев З. Х. Об одном варианте автоматизации применения интервальных методов, основанном на модульном принципе.— Модульный анализ, Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1978.

14. Юлдашев З. Х. Алгоритмы реализации машинной интервальной арифметики для ЭЦВМ БЭСМ-6.— Госфонд алгоритмов и программ СССР, П001726. Аннотация в инф. бюллетене «Алгоритмы и программы», 1976, № 64, вып. 2.
15. Юлдашев З. Х. Алгоритмы реализации машинной интервальной арифметики для ЭВМ с несимметричным множеством машинных чисел на языке Алгол-60.— Госфонд алгоритмов и программ СССР, П002614.
16. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Ч. I. Некоторые задачи анализа и алгебры в интервальной математике. Новосибирск, 1978. 44 с. (Препринт № 19 ИТПМ СО АН СССР.)
17. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Ч. II. Применение интервальных методов при решении дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1978. 39 с. (Препринт № 20 ИТПМ СО АН СССР.)
18. Moore R. E. Interval analysis. N. Y., Prentice-Hall, 1966.
19. Rohn J. Input-output planning with inexact data. Universitat Freiburger, I. B. N 78/9, 1978.
20. Rohn J. Systems of linear equations with coefficients prescribed by intervals.— Econom.-Mat. Obzor., 1976, v. 12, p. 311—315.
21. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., Наука, 1970.
22. Mayer O. Algebraische und metrische strukturen in der intervallrechnung und einige Anwendungen.— Computing, 1970, v. 5, p. 144—162.
23. Ratschek H. Nichtnumerische aspekte der intervallarithmetik.— Lecture Notes in Computer Science, 1975, v. 29, p. 48—74.
24. Schröeder G. Charakterisierung des quasilinearen Raumes I(R) und klassifizierung der quasilinearen Raume der Dimension 1 und 2.— Computing, 1972, v. 10, p. 111—120.
25. Schröeder G. Differentiation of interval functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, v. 36, p. 485—490.
26. Radströem H. An embedding theorem for spaces of convex sets.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, v. 3, p. 165—169.
27. Kracht M., Schröeder G. Zur Intervallrechnung in linearen Räumen.— Computing, 1973, v. 11, p. 73—79.
28. Nickel K. Verbandstheoretische Grundlagcu der Intervall-Mathematik.— Lecture Notes in Computer Science, 1975, v. 29, p. 251—263.
29. Ratschek H., Schröeder G. Über die Ableitung von Interwallwertigen Funktionen.— Computing, 1971, v. 7, p. 172—187.
30. Ratschek H. Mittelwertsäze für Intervallfunktionen.— Num. Math., 1977, N 6, S. 133—144.
31. Sendov Bl. Segment arithmetic and segment limit.— Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 1977, v. 30, p. 955—958.
32. Sendov Bl. Segment derivatives and Taylor's formula.— Comp. rend. Acad. bulg. Sci., 1977, v. 30. p. 1093—1096.
33. Markov S. Extended interval arithmetic and some applications. Universitat Freiburger, I. B. N 78/4, 1978.
34. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., Мир, 1974.
35. Альберг Дж., Нильсен Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., Мир, 1972.

36. **Alefeld C.** Über die aus monoton zerlagbaren Operatoren gebideten Intertionsverfahren.— Computing, 1970, v. 6, p. 161—172.
37. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
38. **Bierbaum F.** Einsatz der Intervallarithmetik bei der numerischen Konvergenz von Algol-60 Programmen.— "Lecture Notes in Computer Science", 1975, v. 29, p. 160—168.
39. **Wongwises Pr.** Experimentelle Untersuchungen zur numerischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen mit Fehlerfassung. Universitat Karlsruhe, I. B. N 75/1, 1975.
40. **Hebgen M.** Eine scaling — invariante Pivotsuche für Intervallmatrizen.— Computing, 1974, v. 12, p. 99—106.
41. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М., Наука, 1973.
42. **Krueckeberg F.** Ordinary differential equations.— Topics in interval analysis. Oxford, 1969.
43. **Hansen E.** On solving two-poit boundary-value problems using interval arithmetic.— Topics in interval analysis. Oxford, 1969.
44. **Oliveira F.** Interval analysis and two-poit boundary value problems.— SIAM J. Numer. Anal., 1974, v. 11, N 2, p. 382—391.
45. **Tost R.** Loesung der 1. Randwertanfgabe der Laplace-Gleichung im Recttech mit Intervallanalytischen niethoden. Berichte der GMD Bonn, 1970, N 28.
46. **Bauch H.** Zur Lösungseinschlie Bung bei Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Defektmethode.— Z. angew. Math. Mech., 1977, N 57, S. 387—396.
47. **Bauch H.** Zur intervallanalytischen Lösungseinschließung bei charakteristischen Anfangswertproblemen mit hyperbolischer Differentialgleichung.— Z. angew. Math. Mech., 1977, N 57, S. 543—547.
48. **Коновалов А. Н., Яненко Н. Н.** Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды.— В кн.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972.
49. **Карпов В. Я., Корякин Д. А., Самарский А. А.** Принципы разработки прикладных программ для задач математической физики.— ЖВМ и МФ, 1978, т. 18, № 2.
50. **Apostolatos N., Kulisch U., Kravczyk R. e. a.** The algorithmic language Triplex-Algol-60.— Num. Math., 1968, v. 11, p. 175—180.
51. **Yohe J. M.** A semi-portable interval arithmetic package for Fortran. Universitat Freiburger, I. B. N 78/3, 1978.
52. **Yohe J. M.** The interval arithmetic package. University of Wisconsin, Madison. Mathematical Research Center, technical summary report, 1977, N 1755.
53. **Yohe J. M.** Roundings in floating-poit arithmetic.— IEEE Trans. Computers C-22, 1973, p. 577—586.
54. **Kilisch U.** Formalization and implementation of floating-point arithmetics.— Computing, 1975, v. 14, p. 324—348.
55. **Moore R. E.** On computing the range of a rational function of n-variables over a bounded region. Universitat Karlsruhe, I. B. N 75/2, 1975.
56. **Воеводин В. В., Ким Г. Д.** Машинные операции с точки зрения математика.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М., МГУ, 1977, вып. 26, с. 31—36.
57.*) **Калмыков С. А.** Двусторонний метод решения уравнения $y'=f(y)$ с начальным значением в виде интервала.— Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1980, т. 11, № 1, с. 111—126.
58. **Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., Рогалев А. Н.** О принципах построения пакета интервальных операций.— Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1980, № 11, № 5, с. 147—153.
63. **Панкова Г. Д.** Пакет программ интервального анализа для автоматической оценки влияния погрешности исходных данных при численном решении некорректных задач.— В кн. Всесоюзная конфер. по некорректно поставленным задачам. Тезисы докладов. Фрунзе, 1979, с. 90—91.
60. **Матиясевич Ю. В.** Пакет алгол-процедур для вычислений с контролируемой точностью.— В кн. Всесоюзный симпозиум «Искусственный интеллект и автоматизация исследований в математике». Киев, 1978, с. 61—62.
61. **Иманалиев М. И., Панкова Г. Д.** Применение интервального анализа к исследованию зависимости бегущей волны от малого возмущения для уравнения синус-Гордона.— В кн. Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. Ч. 1. Алма-Ата, 1979, с. 44—45.
62. **Панкова Г. Д.** Применение интервального анализа к распознаванию образов чисел.— В кн. Математические методы теории систем. Вып. 1. Фрунзе, 1979, с. 112—114.
63. **Панкова Г. Д.** Пакет программ интервального анализа для ЭВМ серии ЕС.— Госфонд алгоритмов и программ СССР, П003509.
64. **Shokin Yu. I., Rogalev A.** The inverse mapping of interval functions.— Abstracts of Interval Simposium, 1980. Freiburger Intervall-Berichte. I. B. N 80/2, 1980, p. 46.
65. **Marcov S., Dimitrova N.** Rechehgesetze der erweiterten Intervall-arithmetik. Universität Freiburg. I. B. N 79/10, 1979.
66. **Wildenauer P.** Domains with all solutions of non-linear problems with non-inverse-isotone operators. Universität Freiburg. I. B. N 79/10, 1979.
67. **Nickel K.** Ein global konvergentes Kugl-Newton-Verfahren. Universität Freiburg. I. B. N 79/9, 1979.
68. **Nickel K.** Schranken für die lösungsmengen von funktional-differential-gleichungen. Universität Freiburg. I. B. N 79/4, 1979.

---

*) Ниже следует список литературы, добавленный для удобства читателя после сдачи книги в набор и отражающий последние результаты, полученные в области интервального анализа.

69. **Beiser W. J.** Intervall-Newton-Verfahren zur bestimmung von nullstellen reeler functionen einer veränderlichen. Universität Freiburg. I. B. N 79/2, 1979.
70. **Garloff J., Schwierz K.-P.** Intervall-mathematik eine Literaturübersicht nachtrag. Universität Freiburg. I. B. N 79/1, 1979.
71. **Garloff J., Schwierz K.-P.** A bibliography on interval mathematics.— J. Comput. Appl. Mathem., 1980, v. 6, N 1, p. 67—79.
72. **Interval** Symposium 1980. Abstracts. Universität Freiburg. I. B. N 80/2, 1980.
73. **Moore R. E.** Methods and applications of interval analysis.— SIAM, 1979, p. 199.
74. **Solak W.** Iterative methods for convex and inverse monotonic operators. Universität Freiburg. I. B. N 79/6, 1979.
75. **Reichmann K.** Abruch beim Intervall-Gauss-Algorithmus. Universität Freiburg. I. B. N 79/5, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ